

现浇空心板宏观基本本构关系

谢靖中

(上海交通大学，上海 200030)

摘要：研究宏观等效泊松比和弹性模量。首先通过解析方法，推导了空心板作为双向肋板的泊松比的计算公式。其次根据应力分布特点，提出圆孔空心板横管向弯曲、轴压弹性模量的有效截面计算方法，确定竖向倾角 $\alpha_0 = 22.5^\circ$ 的孔半径所在水平线为有效截面的边界线，并给出计算公式。此外研究还发现，双向肋板中存在横肋引起刚度增大的“横肋效应”现象，给出该现象的量化表达式。所提方法和公式均通过理论、数值验证，是现浇空心板结构计算的理论基础。

关键词：现浇空心板；构造各向异性；本构关系；泊松比；弹性模量；横肋效应

中图分类号：TU375.2； TU313.1 **文献标志码：**A

文章编号：

On macroscopic-level constitutive relationship of cast-in-situ Hollowed-core slabs

Xie Jingzhong

(Jiaotong University of Shanghai, Shanghai 200030, China)

Abstract: In the present paper, a study was made on the method of computing equivalent Poisson ratio and elastic modulus of cast-in-situ hollowed-core slabs at the macroscopic level. At first, the formulas of computing the Poisson ratio of cast-in-situ hollowed slabs with bilateral ribs are deduced by theoretical means. Then, based on the characteristics of stress distribution, an effective sectional area method is advocated for computing both the bending and axial elastic modulus of circular hollowed-core slabs at the transverse section, and the boundary of the effective area is suggested to be at a radial distance with its vertical slope angle being $\alpha_0 = 22.5^\circ$. Relevant formulas for computational purpose are also proposed. Meanwhile, the transverse-rib phenomenon, which may lead to stiffness increasing of the slab, has been revealed from the present study. This phenomenon is modeled by an appropriate mathematical relationship. The proposed methods and formulas are carefully evaluated by both theoretical and numerical means and they may be considered as the fundamental constitutive relationships for structural analysis of cast-in-situ hollowed-core slabs.

Keywords: cast-in-situ hollow-core slab; constructive orthogonal anisotropic; constitutive relationship; Poisson ration, elastic modulus; transverse-rib-affectation

E-mail: xiejz@sjtu.edu.cn

引言

现浇空心板楼盖结构是我国近年来发展起来的一种新型板式楼盖结构^[1,2]，在实际工程中得到了广泛应用。空心板作为混凝土结构构件，其承载能力有较多研究。但其基本的力学特性，即基本的弹性模量、泊松比等基本本构关系，还很少有涉及。而这些基本本构关系，是进行正确计算的基础。

空心板是一种典型的构造各向异性体，即基本材料是各向同性体，但由于板两方向孔芯的不同，使板整体受力上呈现各向异性。对于圆孔空心板，早期认为是单向受力，经试验和理论研究，表明仍然是双向

作者简介：谢靖中，博士，讲师

收稿日期：2005-12-01

受力^[4,5]。有关空心板的计算方法，总体上可以归为两类，即离散化方法和连续化方法。

离散化方法特点是基本计算单元为各向同性，由单元组成的结构体现各向异性。一种方法将空心板的纵横肋、肋间板均用细分块体元模拟，这是一种较为精确的计算方法，但由于建模复杂、计算量大，只能用于单个板的精确分析研究，不能用于整体结构的设计计算。等代梁法也是离散化方法的一种，将两方向等效为均质的梁，由刚度差异的双向梁体现空心板的

各向异性。等代梁法对于空心板楼盖只是近似计算，不能完全反映其受力特点，并且很难确定合理的扭转刚度折减^[3,6]。

连续化方法将空心板的微观上纵横肋连续化，将空心板作为宏观的各向异性均质板进行计算。工程中的空心板跨度与厚度比值介于 20~30 之间，空心板肋间距相对于跨度而言是一个小量，在总体上仍为板的受力特点^[6]，因此这种连续化的处理方法符合空心板的实际情况。

无论连续化分析方法，还是离散化的等代梁法，均需涉及空心板的基本本构关系(等代梁法需要确定单向梁的宏观等效刚度)。一些文献中提供了类似的单向肋板、波纹板等构造各向异性板的一些截面参数的计算公式，但未涉及基本的本构特性^[7,8]。关于空心板，一些文献涉及到了截面简单等效的方法，但也未涉及其本构关系。

工程中的空心板基本上都是双向肋板，无论圆孔空心板、方盒空心板(或其它异形孔)，孔芯在板两方向均不连续，这样即在板两个方向上形成相同或不同的肋板。这种特殊的双向肋板，其宏观本构关系，不同于均质板，也不同于单向肋板。本文将研究空心板的基本宏观等效本构关系，推导其弹性模量、泊松比等基本参数的计算公式。

1 宏观泊松比 μ

泊松比是单向均匀拉伸或压缩时，在横向产生的应变与受力方向应变的比值。空心板宏观泊松比，可以通过施加板面内轴向均匀压力，计算两方向变形，由变形的比值得到。

首先分析相对简单的方盒空心板的情况。方盒空心的肋的厚度较小，一般为 0.1m 左右，而肋间距为 1m 左右，肋厚度相对于肋间距为小量。因此在板面内的轴向均匀压力作用下，可以采用如下假定：

(1) 忽略肋的厚度影响，包括忽略肋引起的肋间板应力的波动；

(2) 忽略肋的厚度影响，在面内轴向压力作用下，纵横肋的应力均匀分布。

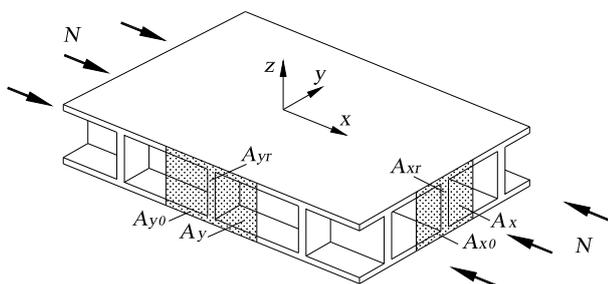


图 1 方盒空心板

Fig.1 Cubic hollow-core slab

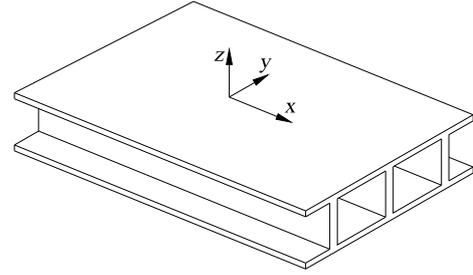


图 2 单向肋板

Fig.2 Unilateral rib slab

1.1 泊松比 μ 值得公式推导及“横肋效应”现象

对于图 1 所示的方盒空心板，顺压力方向为纵肋，垂直压力方向为横肋。首先忽略横肋，则双向肋板变为单向肋板，如图 2 所示。这时纵肋、肋间板均不受约束地自由变形，可以推论肋板侧向变形应与均质板的变形相同(后文将验证)。因此单项肋板在纵肋方向的泊松比，与基本材料的泊松比 μ_0 相同。这时可得到初始的纵向应变 ε_{x0} ，和横向应变 ε_{y1} ：

$$\varepsilon_{x0} = \frac{N}{(A_{x0} + A_{xr})E_0} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{y1} = \mu_0 \varepsilon_{x0} \quad (2)$$

μ_0 、 E_0 是基本材料本身的泊松比、弹性模量。 A_{xr} 是纵肋的面积， A_{x0} 是纵向肋间板的面积。

加上横肋后，由于变形协调，横肋的应变与板的侧向应变相同。同时由于横肋不直接受力，其应变不是由于纵向受压产生的应变，因此横肋的应变是由于肋间板对横肋的约束作用。设横肋的应变与板的横向应变相同，则横肋变形产生的约束力为：

$$N'_y = \varepsilon_{y1} A_{yr} E_0 \quad (3)$$

约束力 N'_y 使板产生横向压缩应变：

$$\varepsilon_{y2} = \frac{N'_y}{(A_{y0} + A_{yr})E_0} = \mu_0 \varepsilon_{x0} \gamma_y \quad (4)$$

$$\gamma_y = \frac{A_{yr}}{A_{y0} + A_{yr}} \quad (5)$$

γ_y 表示横向肋与横向实心截面的比值。

板实际的横向应变是 ε_{y1} 与 ε_{y2} 的差值：

$$\varepsilon_y = \varepsilon_{y1} - \varepsilon_{y2} = \mu_0 \varepsilon_{x0} (1 - \gamma_y) \quad (6)$$

与此同时，横向约束力 N'_y 在纵向也产生附加应变。类比(5)、(6)式，纵向的附加应变可直接得到：

$$\varepsilon'_x = \mu_0 \varepsilon_{y2} (1 - \gamma_x) = \mu_0^2 \varepsilon_{x0} \gamma_y (1 - \gamma_x) \quad (7)$$

$$\gamma_x = \frac{A_{xr}}{A_{x0} + A_{xr}} \quad (8)$$

最终的纵向应变是 ε_{x0} 与 ε_x' 的差值:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{x0} - \varepsilon_x' = \frac{N}{(A_{x0} + A_{xr})E_0} [1 - \mu_0^2 \gamma_y (1 - \gamma_x)] \quad (9)$$

纵向的附加应变 ε_x' 也会再次在横向产生应变,由(7)式可知,这种应变将是高阶小量,可以忽略。

由(9)式可知,由于横肋的影响,双向肋板在轴压下的实际的宏观弹性模量应为:

$$E_x' = \frac{E_0}{1 - \mu_0^2 \gamma_y (1 - \gamma_x)} \quad (10)$$

很明显, $E_x > E_0$ 。这种由于横肋的约束作用使双向肋板宏观弹性模量增大的现象,本文称之为“横肋效应”。在宏观等效中,板等效为均质板,则弹性模量进一步表示为:

$$E_x = \frac{E_0 \lambda_x}{1 - \mu_0^2 \gamma_y (1 - \gamma_x)} \quad (11)$$

$$\lambda_x = (A_{x0} + A_{xr}) / A_x \quad (12)$$

λ_x 为板纵向截面的实心比例。

根据泊松比的定义, ε_y 与 ε_x 的比值即为空心板的沿纵向的泊松比。由(6)、(9)式可得到:

$$\mu_x = \mu_0 \frac{1 - \gamma_y}{1 - \mu_0^2 \gamma_y (1 - \gamma_x)} \quad (13)$$

上式中分子总小于分母,空心板的宏观泊松比总小于基本材料的泊松比 μ_0 。

1.2 理论验证

对于平面各向异性弹性体,总存在如下恒等式:

$$\mu_x / E_x = \mu_y / E_y \quad (14)$$

下面验证本文结果是否满足这一恒等式。由(11)、(13)式,可得到:

$$\frac{\mu_x}{E_x} = \frac{\mu_0}{E_0} \frac{1 - \gamma_y}{\lambda_x} = \frac{\mu_0}{E_0} \frac{A_{y0} A_x}{(A_{y0} + A_{yr})(A_{x0} + A_{xr})} \quad (15)$$

注意到上述各截面积均为相对值,当取 $A_x = A_y$ 时,有 $A_{x0} = A_{y0}$,因此上式右端项与方向无关,本文结果自然满足(14)式。

1.3 数值验证

上述公式可通过具体的数值算例验证。如图1所示方盒空心板,板整体厚度 0.6m,纵横肋间距均为 1.2m,上下肋间板厚 0.1m,纵肋厚度 0.1m 保持不变,横肋厚度 0.05m~0.3m 变化。各截面几何参数如下:

$$A_{x0}=0.24\text{m}^2, A_{xr}=0.06\text{m}^2, \gamma_x=0.2, \lambda_x=5/12$$

$$A_{y0}=0.24\text{m}^2, A_{yr}=0.03\sim 0.18\text{m}^2, \gamma_y=1/9\sim 3/7,$$

$$\lambda_y=3/8\sim 7/12$$

基本材料的泊松比 $\mu_0=0.25$, 弹性模量 $E_0=1000\text{MPa}$ 。沿纵肋方向作用均匀压力 0.1MPa ,采用有限元细分模型,计算不同情况下的纵向泊松比和宏观弹性模量,结果示于表1。

当纵肋厚度为0时,方盒空心板变为单向肋板。从表中可看出,数值结果的泊松比仍为基本材料的泊松比,表明本文前面关于单向肋板的推论是正确的。同时有限元数值模型对于单向肋板的纵横向应变、泊松比等均为精确解,也表明该数值模型的结果是精确可靠的。

从表1可看出,由于存在横向肋,方盒空心板的泊松比 μ_x 小于基本材料的泊松比 μ_0 ,并且随着横肋面积的增大,泊松比逐步降低。根据本文公式计算得到的理论解,与有限元数值模型均正确地反映了这一特性,并且数值基本相同。理论解基于纵横肋、肋间板应力均匀分布的假定,而有限元模型能较为客观地反映应力的非均匀分布情况,因此两种模型的结果有一些差别。从表中看出,这种差别的幅度很小,表明本文所采用的假定符合实际情况。

从表1可看出,有横肋的方盒空心板在轴压下的轴向应变小于单肋板,表明“横肋效应”是客观存在的。并且随着横肋的增大,横肋效应越明显。理论解、数值解均反映了这一规律。

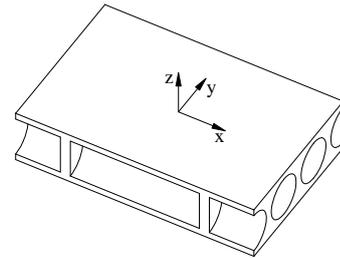


图3 圆孔空心板
Fig.3 Circular hollow-core slab

表 1 方盒空心板的泊松比与弹性模量

Fig.1 The Poisson ratio and elastic modulus of cubic hollow-core slab

横肋厚度(m)	数值结果				本文理论解	
	纵应变 ε_x ($\times 0.001$)	横应变 ε_y ($\times 0.001$)	泊松比 μ_x	弹性模量 E_x'/E_0	泊松比 μ_x	弹性模量 E_x'/E_0
0.0	100.0	25.0	0.25	1.0	0.25	1.0
0.05	99.3161	21.8047	0.2195	1.0069	0.2235	1.0056
0.10	98.8458	19.4109	0.19637	1.0101	0.2020	1.0101
0.15	98.4825	17.5163	0.1779	1.0154	0.1843	1.0138
0.20	98.2071	15.9712	0.1626	1.0183	0.1695	1.0169
0.25	97.9736	14.6830	0.1499	1.0207	0.1569	1.0196
0.30	97.7776	13.5906	0.1390	1.0227	0.1460	1.0219

对于圆孔空心板，如图 3 所示，顺孔方向肋的厚度沿高度变化，并且厚度较大，不再适用前面的两项假定。但横孔方向肋的厚度较薄，且等厚度，仍适用前面的两项假定。因此圆孔空心的顺管方向仍可采用 (11)、(13) 式计算弹性模量和泊松比。横管方向的泊松比不能直接计算，可在计算横向等效弹性模量后，利用恒等式(14)间接得到。

2 宏观弹性模量

作为构造不均匀体，空心板的宏观弹性模量分轴压弹性模量 E_N ，和弯曲弹性模量 E_M ，并且两者的值不同。宏观弹性模量的值需要根据空心板的具体几何参数进行等效计算，方盒空心板和圆孔空心板的计算方法不同。

方盒空心板(如图 1 所示)作为双向肋板，由于横向肋的厚度相对于肋间距是小量，因此刚度等效可以根据单方向的肋及肋间板进行计算，再根据本文前面公式(10)考虑“横肋效应”对刚度的增大影响。

圆孔空心板(如图 3 所示)由于板两正交方向的构造形式差别很大，需要分别采用不同的处理措施。对于顺管方向，由于横肋厚度小，且间距大，因此与方盒板相同，截面刚度可仅根据顺管方向的截面进行计算。而横管方向刚度，需要考虑圆管之间的变厚度肋的影响。

在忽略横向肋的情况下，横管方向的切面如图 4 所示，这种沿长度分布大圆孔构件的刚度研究还很少。在钢结构中，钢梁的腹板也常有这种开洞，以节省用钢量，或减轻沿钢梁高度的热量传播。但钢梁的刚度主要在于翼缘，开洞腹板的刚度常常被忽略，对圆孔空心板显然不能同样处理。这种大开洞的情况也很难得出解析解，需要借助有限元数值模拟分析。

2.1 应力分析

本文对圆孔空心板横肋方向作细分有限元分析。有限元网格剖分如图 5 所示，用 STRAT 软件计算在剪力、弯曲和轴压下的应力分布，示于图 6。其中在剪力作用下，在板跨厚比为 20~30 的一般情况下，还是以弯曲受力为主。

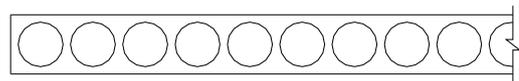


图 4 圆孔空心板横向切面

Fig.4 Transverse section of circular hollow-core slab

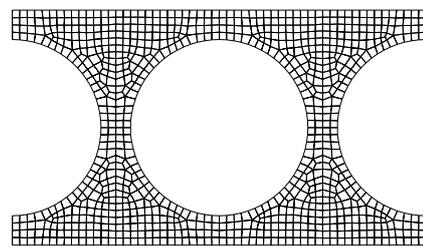
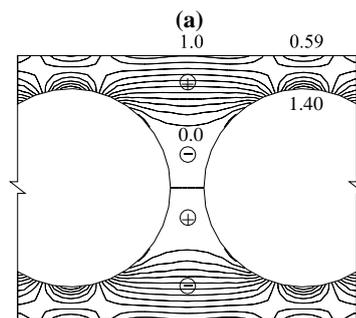
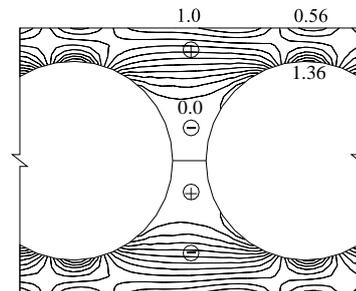


图 5 有限元细分网格

Fig.5 The subdivided mesh of FEM Method



(b)

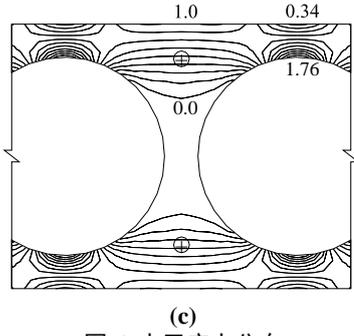


图6 水平应力分布

(a)弯剪 (b)纯弯 (c)轴压

Fig.6 The distribution of horizontal stresses

(a) Bending and shear (b) Pure bending (c) Axial force

从图中可看出应力分布很不均匀。以肋所在位置的板边应力为1，则孔所在位置的板边应力小于1，而孔的内侧应力大于1，孔边存在明显的应力集中现象。在肋的半高度位置有零应力线，在零应力线以内的肋中部应力接近为0。其中在弯剪作用下，零应力线以内的肋中部甚至出现应力反号。在以上三种作用下，圆孔空心板横向截面应力分布呈现相同的特点。

肋板中部的应力为0，表明该部分对整体的刚度没有贡献，在计算等效弹性模量时，应不计该部分的影响。在宏观刚度等效中，也可以忽略微观上应力不均匀分布。因此本文根据有效截面高度，计算圆孔空心板横管方向的宏观弯曲弹性模量、轴压弹性模量。

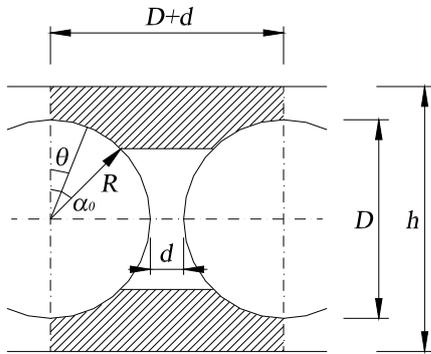


图7 横管方向有效截面

Fig.7 The valid area for transverse section

2.2 等效模型

在宏观刚度等效中，可以忽略微观上应力不均匀分布，并假定零应力线为水平直线。设肋的零应力线所对应的孔半径的竖向倾角为 α_0 ，如图7所示。则一个单位长度 $(D+d)$ 范围内截面惯性矩 $I(x)$ 的积分值为：

$$\begin{aligned} \psi_I &= \int_0^{D+d} I(x) dx \\ &= \frac{1}{12} bh^3 (d+D) - 2 \frac{b}{12} \int_0^{R \sin \alpha_0} D^3 \cos^3 \theta dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{b}{12} \int_0^{d+D(1-\sin \alpha_0)} D^3 \cos^3 \alpha_0 dx \\ &= \frac{1}{12} bh^3 [\eta_1 D \sin \alpha_0 + \eta_2 (d+D - D \sin \alpha_0)] \quad (16) \end{aligned}$$

其中：

$$\eta_1 = 1 - \frac{D^3}{h^3 \sin \alpha_0} \left(\frac{3}{8} \alpha_0 + \frac{1}{4} \sin 2\alpha_0 + \frac{1}{32} \sin 4\alpha_0 \right)$$

$$\eta_2 = 1 - \frac{D^3}{h^3} \cos^3 \alpha_0$$

将空心板等效为宏观各向异性均质板，板厚度等几何参数不改变，因此实际上是弹性模量的改变。由 ψ_I 可得到圆孔空心板横管方向宏观等效弯曲弹性模量：

$$E_M = E_0 \frac{\eta_1 D \sin \alpha_0 + \eta_2 (d+D - D \sin \alpha_0)}{D+d} \quad (17)$$

类似上面的方法，对一个单位长度 $(D+d)$ 范围内的截面 $A(x)$ 的积分：

$$\psi_A = \int_0^{D+d} A(x) dx = bhD(\eta_3 + \eta_4) \quad (18)$$

其中：

$$\eta_3 = \sin \alpha_0 - \frac{D}{2h} (\alpha_0 + \frac{1}{2} \sin 2\alpha_0)$$

$$\eta_4 = \left(\frac{d}{D} + 1 - \sin \alpha_0 \right) \cdot \left(1 - \frac{D}{h} \cos \alpha_0 \right)$$

可得到圆孔空心板横管方向宏观等效轴压弹性模量：

$$E_N = E_0 \frac{D(\eta_3 + \eta_4)}{D+d} \quad (19)$$

利用有限元细分模型，对各种工程常用规格圆孔空心板横管方向弯剪、轴压受力进行分析。并根据分析结果，利用数值方法求解(17)、(19)式中所包含未知参数 α_0 的值。经大量分析表明，在弯剪、纯弯、轴压等作用下， α_0 的取值基本相同。根据适当归并以利于使用的原则，对于工程常用规格的圆孔空心板， α_0 可统一取值为：

$$\alpha_0 = 22.5^\circ \quad (20)$$

2.3 数值验证

下面通过具体的数值算例验证。采用常用的圆孔空心板类型，取横管方向的截面作为悬臂梁，利用细分有限元模型，计算在端弯矩 $M=1.0\text{kN}\cdot\text{m}$ 、轴压力 $N=1.0\text{kN}$ 作用下的端部挠度。三种圆孔空心板的几何参数如下：

I 型： $h=0.5\text{m}$ ， $D=0.4\text{m}$ ， $d=0.05\text{m}$ ， $L=9.5\text{m}$ (跨度)，单元数 13390；

II 型： $h=0.4\text{m}$ ， $D=0.3\text{m}$ ， $d=0.05\text{m}$ ， $L=9.5\text{m}$ ，单元数 12124；

III 型: $h=0.3\text{m}$, $D=0.2\text{m}$, $d=0.05\text{m}$, $L=6.3\text{m}$, 单元数 7596。

有孔悬臂梁与实心悬臂梁的挠度的比值, 即反映了孔洞引起的弹性模量的折减情况。实心梁可以用材料力学方法计算精确解。同时对实心梁也用细分有限元模型计算, 与材料力学结果对比, 以验证有限元方法的精确性。有限元计算采用 STRAT 软件, 计算单

元采用非协调四结点平面元。结果见表 2。

从表 2 中可看出, 对于实心梁, 有限元模型与材料力学理论解结果相同, 表明有限元模型结果精确可靠。有限元模型得到的等效弹性模量, 与本文方法得到的等效弹性模量基本一致。表明本文对圆孔空心板横管方向的弯曲弹性模量、轴压弹性模量的计算方法, 以及 $\alpha_0 = 22.5^\circ$ 的参数取值, 是正确、合理的。

表 2 圆孔空心板横管方向的宏观等效弹性模量
Table 2, The equivalent macroscopical elastic modulus of circular hollow-core slab at transverse section

	荷载 (kN,m)	均质梁挠度(m) (材料力学解)	有限元数值结果			宏观弹性模量 (本文解)
			均质梁挠度(m)	圆孔板挠度(m)	模量折减	
I 型	M	4.332×10^{-3}	4.332×10^{-3}	7.589×10^{-3}	0.571	$E_M/E_0 = 0.572$
	N	1.900×10^{-5}	1.900×10^{-5}	7.728×10^{-5}	0.246	$E_N/E_0 = 0.241$
II 型	M	8.461×10^{-3}	8.461×10^{-3}	1.289×10^{-3}	0.656	$E_M/E_0 = 0.648$
	N	2.375×10^{-4}	2.375×10^{-4}	7.930×10^{-4}	0.299	$E_N/E_0 = 0.284$
III 型	M	8.820×10^{-3}	8.820×10^{-3}	11.442×10^{-3}	0.771	$E_M/E_0 = 0.754$
	N	2.100×10^{-5}	2.100×10^{-5}	5.414×10^{-5}	0.388	$E_N/E_0 = 0.348$

3 结论

(1) 推导了现浇空心板作为构造各向异性板的泊松比的计算公式。对于工程常用的方盒空心板, 可以直接利用利用本文公式, 根据空心板肋、肋间板的面积计算两正交方向的泊松比。对于圆孔空心板, 可以直接利用本文公式计算顺管方向泊松比, 并根据两方向的弹性模量的比值间接得到横管方向的泊松比。

(2) 在推导泊松比计算公式的过程中, 发现空心板作为双向肋板, 存在横肋引起刚度增大的“横肋效应”现象。有限元数值算例的结果也表明横肋效应是实际存在的现象。

(3) 根据有限元数值分析反映的应力分布特点, 提出根据有效截面高度计算圆孔空心板横管方向宏观弯曲弹性模量、轴压弹性模量的处理方法, 并且确定有效截面高度为竖向倾角 $\alpha_0 = 22.5^\circ$ 的孔半径所确定的零应力线的以外部分。

(4) 推导了根据有效截面计算圆孔空心板横管方向宏观弯曲弹性模量、轴压弹性模量的计算公式。

(5) 本文方法均得到有限元数值模型的验证, 并且有限元数值模型本身精确性也得到验证。

参考文献

[1] 徐有邻, 冯大彬. 推广现浇空心楼盖发展节约型混凝土结构[C]. 全国现浇混凝土空心楼盖结构技术交流会论文集. 上海: 2005.7: 1-7

[2] 黄勇, 马克俭, 等. 钢筋混凝土空腹夹层板楼盖体系的研究与应用[J]. 建筑结构学报, 1997,18(6): 55-64

[3] 马克俭, 张华刚, 等. 大柱网现浇混凝土框架正交异性

空心大板楼盖结构的应用和研究[C]. 全国现浇混凝土空心楼盖结构技术交流会论文集, 上海: 2005.7: 21-36

[4] 楼文娟, 吴晓鹏, 等. 现浇预应力空心板梁楼盖现场试验研究[J]. 浙江大学学报, 2005, 39(8): 1223-1228

[5] 方忠年, 王玮. 现浇钢筋混凝土空心板的试验研究[J]. 四川建筑科学研究, 2005, 31(3): 18-21

[6] 谢靖中. 空心板楼盖受力特性及受力岛设计理论[C]. 全国现浇混凝土空心楼盖结构技术交流会论文集. 上海: 2005.7: 139-151

[7] Young W.C. and Budynas R.G. Roark's formulas for stress and strain (7th edition). The McGraw-Hill Companies Inc., 2002

[8] 徐芝纶. 弹性力学(下册). 北京: 高等教育出版社, 1992.5