

一种新的集成的非线性杆件单元刚度矩阵的方法

谢靖中，李国强

(同济大学建筑工程系，上海，200092)

摘要：对于非线性杆件单元，本文提出一种新的简便有效的集成单元刚度矩阵的算法。该方法直接从结构力学中的位移法的概念出发，通过解析积分或数值积分求解积分算子，由积分算子线性组合，能快速求解考虑弯、剪、扭、轴压等各种非线性刚度的杆件单元的刚度矩阵。该方法具有广泛的普适性，能适用于所有多项式、插值多项式、解析式、离散点描述的变刚度、变截面直杆的单元刚度矩阵集成计算。文中通过求解线性直杆单元刚度矩阵验证了该方法的正确性。

关键词：非线性杆件单元，变刚度杆单元，刚度矩阵，积分算子

中图分类号：TU313

文献标志码：A

1 概述

对于非线性杆件单元，在杆件分段截面刚度参数 $EI(x)$ 、 $GA(x)$ 、 $GJ(x)$ 、 $EA(x)$ 等确定之后，由这些截面刚度集成单元刚度矩阵时，现有的计算方法大多采用设定的位移插值函数和力场插值函数，由虚位移原理通过高斯数值积分，得出单元刚度矩阵^[1~3]。

对于力场插值函数，根据静力平衡条件，一般能符合实际情况。但对于位移插值函数，由于非线性杆变形受刚度分布影响，很难准确假定，因此有很大的随意性，这直接影响了计算的精度和可靠性。

本文直接从结构力学位移法基本概念出发，通过引入重积分的定积分表示方法，实现了集成刚度的一般广义积分在杆长度范围内的定积分表示。进一步通过几个规格化的定积分算子的求解，以及这些积分算子的线性组合，得出非线性杆件单元的弯剪刚度矩阵、轴向刚度矩阵、扭转刚度矩阵。这种直接积分求解刚度矩阵的方法，没有采用任何假定，这里称之为积分算子直接刚度法。

本文不涉及非线性杆件的材料本构关系假定，以及截面刚度参数的算法。本文集中论述由单元截面刚度集成单元整体单元刚度矩阵的算法，即截面

$EI(x)$ 、 $EA(x)$ 、 $GA(x)$ 和 $GJ(x)$ 等参数已知。

2 单元刚度公式推导

2.1 抗弯、抗剪刚度

对于图1所示两端嵌固变刚度杆单元，抗弯模量 $EI(x)$ ，剪切模量 $EA(x)$ ，没有杆中分布荷载作用。当杆端存在横向位移 δ_L 或转角 θ_L 时，则按照力平衡的原则，杆中剪力是一恒定值，杆中分布弯矩呈线性变化，假定弯矩 $M(x)$ 、剪力 $Q(x)$ 为：

$$M(x)=Ax+B \quad Q(x)=A \quad (1)$$

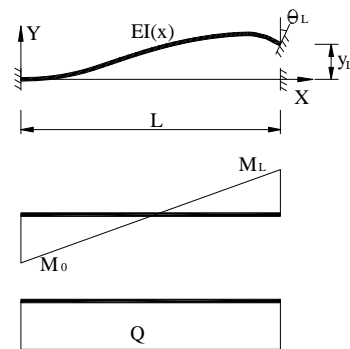


图1、两端嵌固变刚度杆单元

作者简介：谢靖中(1971.3)，男，安徽人，博士研究生，工程师

李国强(1963.2)，男，湖南人，教授，博导，副校长，从事钢结构、结构抗震、结构防火研究

其中 A 、 B 为未知常量。按一般的力学原理，

有截面曲率 $\psi(x)$:

$$\psi(x) = \frac{M(x)}{EI(x)} = \frac{Ax+B}{EI(x)} \quad (2)$$

对曲率沿长度积分得到转角:

$$\theta(x) = \int \psi(x) dx = \int \frac{Ax+B}{EI(x)} dx \quad (3)$$

再次积分得到弯曲产生的位移:

$$y_M(x) = \int \theta(x) dx = \iint \frac{Ax+B}{EI(x)} dx dx$$

同时由于存在剪切非线性形变, 由剪切形变产生的位移:

$$y_Q(x) = \int \frac{Q(x)}{GA(x)} dx = \int \frac{A}{GA(x)} dx$$

则总体位移:

$$y(x) = y_M(x) + y_Q(x) \quad (4)$$

下面将一般积分表达式转化为定积分的形式。首先将(3)式改写为 $[0, L]$ 区间的定积分表式的杆件右端转角与左端转角的差值:

$$\Delta\theta = \int_0^L \frac{Ax+B}{EI(x)} dx \quad (5)$$

同时将(3)式等效为 $[0, L]$ 区间的定积分和0点的常量的表达式:

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{A\xi+B}{EI(\xi)} d\xi + \theta_0 \quad (6)$$

式中 θ_0 为 $x=0$ 处的截面转角。

将(6)式代入(4)式, 同时将(4)式改写为由 $[0, L]$ 区间定积分表示的杆件右端位移与左端位移的差值:

$$\Delta y = \int_0^L \theta(x) dx = \int_0^L \left(\int_0^x \frac{A\xi+B}{EI(\xi)} d\xi \right) dx + \theta_0 L + \int_0^L \frac{A}{GA(x)} dx \quad (7)$$

在非线性的杆单元中, 描述截面参数的将是一些离散点, 因此将(5)、(7)两式离散化:

$$\Delta\theta = \sum_{i=1}^N \frac{Ax_i+B}{EI_i} \Delta x_i \quad (8)$$

$$\Delta y = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^k \frac{Ax_i+B}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k + \sum_{i=1}^N \frac{A}{GA_i} \Delta x_i + \theta_0 L \quad (9)$$

参数 A 、 B 是待定常数, 将上两式分离系数, 并从多项式中提出这两个常数变量, 则上面两个表达式写为:

$$\Delta\theta = A \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{EI_i} \Delta x_i + B \sum_{i=1}^N \frac{1}{EI_i} \Delta x_i \quad (10)$$

$$\Delta y = A \left[\sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^k \frac{x_i}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k + \sum_{i=1}^N \frac{1}{GA_i} \Delta x_i \right] + B \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k + \theta_0 L \quad (11)$$

$$\text{令: } F_1 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{EI_i} \Delta x_i = \int_0^L \frac{x}{EI(x)} dx$$

$$F_2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{EI_i} \Delta x_i = \int_0^L \frac{1}{EI(x)} dx$$

$$F_3 = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^k \frac{x_i}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k + \sum_{i=1}^N \frac{1}{GA_i} \Delta x_i = \int_0^L \left(\int_0^x \frac{\xi}{EI(\xi)} d\xi \right) dx + \int_0^L \frac{1}{GA(x)} dx$$

$$F_4 = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^k \frac{1}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k = \int_0^L \left(\int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi \right) dx$$

则有:

$$\Delta\theta = AF_1 + BF_2$$

$$\Delta y = AF_3 + BF_4 + \theta_0 L$$

由于 EI_i ($i=1 \dots N$) 已经确定, F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 等均为确定值, 则上两式是关于 A 、 B 的线性方程组。求解方程组, 则可得到未知常数 A 、 B 的解为:

$$A = \frac{\Delta\theta F_4 - \Delta y F_2 + \theta_0 L F_2}{F_1 F_4 - F_2 F_3}$$

$$B = \frac{\Delta y F_1 - \Delta\theta F_3 - \theta_0 L F_1}{F_1 F_4 - F_2 F_3} \quad (12)$$

至此, 对于杆端位移产生的杆内力的表达式(1)已经确定。令: $F_0 = F_1 F_4 - F_2 F_3$

$$M(x) = \frac{\Delta\theta F_4 - \Delta y F_2 + \theta_0 L F_2}{F_0} x + \frac{\Delta y F_1 - \Delta\theta F_3 - \theta_0 L F_1}{F_0}$$

$$Q(x) = \frac{\Delta\theta F_4 - \Delta y F_2 + \theta_0 L F_2}{F_0} \quad (13)$$

对于任意的杆端横向侧移和转角, 其产生的分布弯矩 $M(x)$ 和剪力 $Q(x)$ 均可以由式(13)通过积分算子 $F_1 \sim F_4$ 表达出来。

2.2 轴向刚度

当杆件右端产生轴向位移 δ_L 时,在杆中产生恒定的轴力,设为 P 。在各截面产生的纵向应变为:

$$\varepsilon(x) = P/EA(x) \quad (14)$$

对 $\varepsilon(x)$ 在 $[0, L]$ 范围内积分,则得到两端的纵向位移的差值:

$$\Delta x = \int_0^L \frac{P}{EA(x)} dx \quad (15)$$

将定积分离散化:

$$\Delta x = P \sum_{i=1}^N \frac{1}{EA_i} \Delta x_i \quad (16)$$

令:
$$H_1 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{EA_i} \Delta x_i \quad (17)$$

则在右端作用单位纵向位移时,产生的杆端轴力为

$$N_{0,xL} = \frac{-1}{H_1} \quad N_{L,xL} = \frac{1}{H_1} \quad (18)$$

2.3 扭转刚度

当杆件右端产生扭转角 ϕ_L 时,在杆中产生恒定的扭矩 T 。在各截面产生的单位长度上的扭转角为:

$$\phi'(x) = T/GJ(x) \quad (19)$$

对 $\phi'(x)$ 在 $[0, L]$ 范围内积分,则得到两端的扭转角差值。已知左端位移为0,则

$$\Delta \phi = \int_0^L \frac{T}{GJ(x)} dx \quad (20)$$

同样将定积分离散,同时令:

$$T_1 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{GJ_i} \Delta x_i \quad (21)$$

则在右端作用单位扭转角时,产生的杆端扭矩为

$$T_{0,xL} = \frac{-1}{T_1} \quad T_{L,xL} = \frac{1}{T_1} \quad (22)$$

3 单元刚度矩阵

由于不考虑各中弯剪、轴力、扭矩等作用之间的耦合,为表述方便,将各类单元刚度矩阵分开表示。在有限元分析计算中可用其中的部分,或者将三部分合成整个单元刚度矩阵。

3.1 弯剪单元刚度矩阵

对于单元刚度矩阵 $[K_{M,Q}]$,有表达式:

$$[K_{M,Q}] \{\delta_{M,Q}\} = \{F_{M,Q}\} \quad (23)$$

$$\{\delta_{M,Q}\}^T = \{y_0 \quad \theta_0 \quad y_L \quad \theta_L\}$$

$$\{F_{M,Q}\}^T = \{Q_0 \quad M_0 \quad Q_L \quad M_L\}$$

由前面公式(13),可求得杆端产生单位位移时在杆件左右两端产生的弯剪杆端力:

1) 当左端嵌固,右端产生 $y_L=1$ 的单位侧移。

此时 $\Delta\theta=0, \Delta y=1, \theta_0=0$ 。

$$M_{0,yL} = F_1 / F_0 \quad (24a)$$

$$M_{L,yL} = (F_1 - F_2 L) / F_0$$

$$Q_{0,yL} = -F_2 / F_0 \quad (24b)$$

$$Q_{L,yL} = -F_2 / F_0$$

下标的第一位表示力所在的位置,第二位表示产生内力的位移。下同。

2) 当左端嵌固,右端产生 $\theta_L=1$ 的单位转角。

此时 $\Delta\theta=1, \Delta y=0, \theta_0=0$ 。

$$M_{0,\theta L} = -F_3 / F_0 \quad (24c)$$

$$M_{L,\theta L} = (F_4 L - F_3) / F_0$$

$$Q_{0,\theta L} = F_4 / F_0 \quad (24d)$$

$$Q_{L,\theta L} = F_4 / F_0$$

3) 当右端嵌固,左端产生 $y_0=1$ 的单位侧移。

此时 $\Delta\theta=0, \Delta y=-1, \theta_0=0$ 。

$$M_{0,y0} = -F_1 / F_0 \quad (25e)$$

$$M_{L,y0} = (F_2 L - F_1) / F_0$$

$$Q_{0,y0} = F_2 / F_0 \quad (25f)$$

$$Q_{L,y0} = F_2 / F_0$$

4) 当右端嵌固,左端产生 $\theta_0=1$ 的单位转角。

此时 $\Delta\theta=-1, \Delta y=0, \theta_0=1$ 。

$$M_{0,\theta 0} = (F_3 - F_1 L) / F_0 \quad (24g)$$

$$M_{L,\theta 0} = (F_2 L^2 - F_1 L - F_4 L + F_3) / F_0$$

$$Q_{0,\theta 0} = (F_2 L - F_4) / F_0 \quad (24h)$$

$$Q_{L,\theta 0} = (F_2 L - F_4) / F_0$$

根据公式(24)中的各项表达式,可组合成单元刚度矩阵如下:注意到式(24)各数值是杆端部的弯剪内力,在有限元计算中,参与计算的是杆对节点的作用,因此需将其中的 M_0, Q_L 对应的内力反号。

$$[K_{M,Q}] = \frac{1}{F_0} \begin{bmatrix} F_2 & F_2 L - F_4 & -F_2 & F_4 \\ F_1 & F_1 L - F_3 & -F_1 & F_3 \\ -F_2 & F_4 - F_2 L & F_2 & -F_4 \\ F_2 L - F_1 & D & F_1 - F_2 L & F_4 L - F_3 \end{bmatrix}$$

$$D = F_2 L^2 - F_1 L - F_4 L + F_3 \quad (25)$$

杆件另一个主轴方向的弯剪单元刚度矩阵可

直接沿用公式(25)。

3.2 轴向单元刚度矩阵

对于轴向单元刚度矩阵 $[K_N]$ ，有表达式：

$$\begin{aligned} [K_N]\{\delta_N\} &= \{F_N\} \\ \{\delta_N\}^T &= \{x_0, x_L\} \\ \{F_N\}^T &= \{N_0, N_L\} \end{aligned} \quad (26)$$

由前面公式(18)，可直接形成求得刚度矩阵 $[K_N]$ ：

$$[K_N] = \frac{1}{N_l} \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} \quad (27)$$

3.3 扭转单元刚度矩阵

对于轴向单元刚度矩阵 $[K_T]$ ，有表达式：

$$\begin{aligned} [K_T]\{\delta_T\} &= \{F_T\} \\ \{\delta_T\}^T &= \{\phi_0, \phi_L\} \\ \{F_T\}^T &= \{T_0, T_L\} \end{aligned} \quad (28)$$

由前面公式(18)，可直接形成求得刚度矩阵 $[K_N]$ ：

$$[K_T] = \frac{1}{T_l} \begin{bmatrix} I & -I \\ -I & I \end{bmatrix} \quad (29)$$

4 荷载导算

本文方法可推广到导算非线性杆单元分布荷载的情况。推导过程本文从略，这里给出最终计算公式。

对于非线性杆单元区间 $[x_1, x_2]$ 上中作用的任意分布荷载 $p(x)$ ，在导算等效节点荷载时假定两端嵌固，其杆中内力分布由以下公式表示：

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{F_2(P_2 + P_3) - F_4P_1}{F_1F_4 - F_2F_3}x \\ &\quad + \frac{F_3P_1 - F_1(P_2 + P_3)}{F_1F_4 - F_2F_3} - m(x) \\ Q(x) &= \frac{F_2(P_2 + P_3) - F_4P_1}{F_1F_4 - F_2F_3} - q(x) \end{aligned} \quad (30)$$

式中 $F_1 \sim F_4$ 同式(11)表达式，其它参数为：

$$\begin{aligned} P_1 &= -\sum_{i=1}^N \frac{m(x_i)}{EI_i} \Delta x_i = -\int_0^L \frac{m(x)}{EI(x)} dx \\ P_2 &= -\sum_{k=1}^N \left(\sum_{i=1}^k \frac{m(x_i)}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k = -\int_0^L \left(\int_0^x \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi \right) dx \end{aligned}$$

$$P_3 = -\sum_{i=1}^N \frac{q(x_i)}{GA_i} \Delta x_i = -\int_0^L \frac{q(x)}{GA(x)} dx$$

$q(x)$ 、 $m(x)$ 为仅与分布荷载相关的表达式，对于区间 $[x_1, x_2]$ 上作用均匀分布荷载 $p(x)=p$ 的情况，可写为：

$$\begin{cases} m(x) = 0 & (x \leq x_1) \\ m(x) = \frac{1}{2} p(x - x_1)^2 & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ m(x) = \frac{1}{2} p(x_2 - x_1)^2 + p(x_2 - x_1)(x - x_2) & (x_2 \leq x \leq L) \\ q(x) = 0 & (x \leq x_1) \\ q(x) = px & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ q(x) = p(x_2 - x_1) & (x_2 \leq x \leq L) \end{cases}$$

5 算例与应用

对于均质杆，刚度 EI 为常数，忽略剪切刚度，由式(11)及相关公式计算可得到：

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{L^2}{2EI} & F_2 &= \frac{L}{EI} \\ F_3 &= \frac{L^3}{6EI} & F_4 &= \frac{L^2}{2EI} \\ F_0 &= \frac{L^4}{12EI^2} \end{aligned}$$

由公式(25)可计算单元刚度矩阵 $[K_{M,Q}]$ 为：

$$[K_{M,Q}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{6EI} & \frac{6EI}{2EI} \\ \frac{L^3}{6EI} & \frac{L^2}{4EI} & -\frac{L^3}{6EI} & \frac{L^2}{2EI} \\ \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} & \frac{L^2}{12EI} & \frac{L}{6EI} \\ -\frac{L^3}{6EI} & \frac{L^2}{2EI} & -\frac{L^3}{6EI} & \frac{L^2}{4EI} \\ \frac{L^3}{L^2} & \frac{L}{L} & \frac{L^3}{L^2} & \frac{L}{L} \end{bmatrix}$$

很明显，用本文方法求解的均质杆的弯剪单元刚度与一般方法求解的结果完全相同。

6 讨论

本文方法直接从结构力学的基本概念出发，在求解刚度矩阵的过程中没有任何假定，因此具有广泛的普适性。通过解析定积分和数值积分的方式，能求解所有多项式、插值多项式、解析式、离散点描述的变刚度、变截面直杆的单元刚度矩阵和荷载矩阵。杆件长度范围内的定积分算子，无论解析解

还是数值积分，都很容易实现。由积分算子的线形组合，即可得出单元的刚度矩阵。

用解析定积分计算的结果即为理论解，不存在计算误差。对于通过数值积分的计算结果，其精度与截面分段数有关。增加分段数的计算量只会线性增加，因此在其它条件容许的情况下，完全可以增加截面数以达到更高的计算精度。

本文数值积分为描述方便，采用的是简单的线性数值积分方法。在实际应用中可采用其它二次、三次等精度更高的计算方法，在不增加截面分段数的情况下，提高计算精度。

本文方法在已经求得截面 $EI(x)$ 、 $EA(x)$ 、 $GA(x)$ 、 $GJ(x)$ 等截面参数的基础上。在非线性计算中，这些截面参数的计算需根据材料本构关系和加载过程另行确定。

参考文献：

- [1] Zeris, C.A. and Mahin, S.A. "Analysis of Reinforced Concrete Beam-Column Under Uniaxial Excitation[J]." Journal of Structural Engineering, ASCE,1988, 114(ST4):804-820.
- [2] Zeris, C.A. and Mahin, S.A. "Behavior of Reinforced Concrete Structures Subjected to Biaxial Excitation." Journal of Structural Engineering, ASCE,1991, 117(ST9): 2657-2673.
- [3] Taucer, F., Spacone, E. and Fillippou, F.C. "A Fiber Beam-Column Element for Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures[R]." EERC Report 91-17, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, 1991.
- [4] Giberson M.F., Two Nonlinear Beams With Definitions of Ductility[J], ASCE, 1969, 95(ST2)

A NEW METHOD OF INTEGRATING STIFFNESS MATRIX OF NONLINEAR FRAME ELEMENT

Jingzhong Xie Guoqiang Li

(The Architectural Engineering Department of Tongji Univ., Shanghai 200092)

Abstract: For the nonlinear beam element, a simple and efficient new method is advocated in this paper to integrate the element stiffness matrix. The method is directly developed from the concept of displacement method of structural mechanics without any hypothesis. With analytic or numerical integrating of factors and the linear combination of them, all elements stiffness matrix of nonlinear frame element about bending moment, shear force, torsion moment and axial force can be quickly gained. Meanwhile, the method can also be generally used for all kinds of straight frame, which varied stiffness or section is described in analytic function or polynomial or interpolation polynomial or discretization, to compute the element stiffness matrix. By a sample of straight linear elastic frame, the method is testified to be correct.

Key Words: Nonlinear Beam Element, Varied Stiffness Frame, Stiffness Matrix, Integrating factors