

# 非线性杆单元荷载矩阵积分算子直接集成算法

谢靖中 李国强

(同济大学建筑工程系, 上海 200092)

摘要：在文献[1]的基础上，本文将积分算子直接集成单元刚度矩阵的方法扩展应用于非线性杆单元的荷载矩阵集成。该方法将分布荷载产生的内力函数分解为由未知参数表示的线形项，和与分布荷载特性相关的已知函数项的组合，计算积分算子，由积分算子的线形组合得到分布荷载产生的杆件内力函数，从而得到荷载矩阵。该方法没有采用任何假定，具有广泛的普适性，能用于求解任意刚度分布杆件上作用任意分布荷载或集中荷载的单元荷载矩阵。对于刚度非连续、荷载分布非连续的情况，该方法避免了高斯数值积分的误差，具有更高的计算精度，

关键词：非线性杆单元，荷载矩阵

中图分类号：TU313 文献标志码：A

对于材料非线性直杆单元，当前集成刚度矩阵和荷载矩阵多采用高斯积分法<sup>[2~4]</sup>。而高斯积分得到精确解的前提是各参数表达式是连续多项式，且多项式的次数与高斯积分点数对应。在大多数应用中，这一条件并不能得到满足。如当前大量采用的用于计算钢筋混凝土梁柱单元的非线性纤维单元，其截面参数本身即为一些离散点，并且在混凝土开裂后局部刚度突变，如仍采用高斯积分法，其误差非常大。对于纤维单元，采用高斯积分法还有一个限制，即要求纤维分段必须是等间隔的，分段数不能太多，不能进行两端加密、跨中加密等处理，限制了纤维单元的应用。

相对于刚度矩阵，荷载矩阵集成的问题更多。对于局部分布荷载、分段分布荷载、集中力荷载，采用高斯积分即存在误差。如果同时单元刚度分布是离散、突变的，高斯积分的误差更大。

文献[1]在一般积分定积分表示方法的基础上，提出基于积分算子直接集成非线性、变截面杆单元刚度矩阵的算法。本文在该方法的基础上，将积分算子直接集成方法扩展到非线性杆单元荷载矩阵的计算。

本文方法没有采用任何假定，具有广泛的普适性。不但适用于非线性纤维单元，也适用于多段变截面单元、刚臂单元，加入适当的积分边界条件，即可用于任意位置塑性铰单元。对于荷载，可以精确导算任意类型分布荷载、集中荷载，包括抛物线预应力索荷载。

在使用本文方法计算荷载矩阵之前，假定非线性杆单元的截面参数  $EI(x)$ 、 $EA(x)$ 、 $GA(x)$  和  $GJ(x)$ 等均已知，同时杆上局部分布荷载  $p(x)$ 或集中荷载  $P$  的描叙函数已知。

## 1. 横向分布荷载的导算

杆件单元中间分布荷载在有限元计算中，需要在假定两端嵌固的条件下，求出杆端作用力。嵌固杆件是超静定的结构，杆端力与刚度分布  $EI(x)$ 有关。对于图(1a)所示嵌固杆件，可以等价地分解为作用中间作用分布荷载较支的静定杆(图 1b)，和两端作用端弯矩的的较支静

定杆(图 1c)两个部分叠加之和。

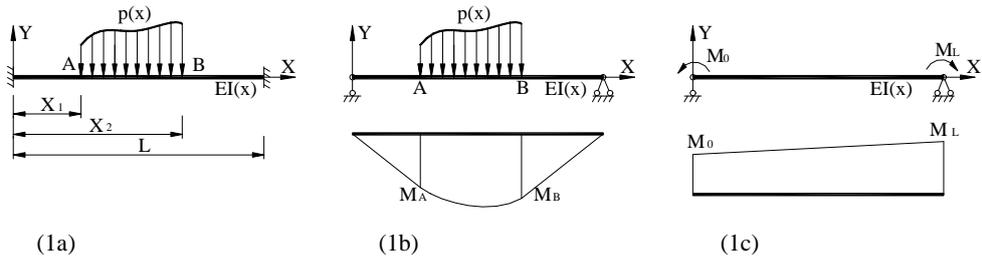


图 1、非线性杆作用横向力荷载

Fig.1 The transverse distributing load of nonlinear beam

作者简介：谢靖中(1971.3)，男，安徽人，博士研究生，工程师

对于图(1b)所示铰支杆，分布荷载产生的内力与杆件刚度分布无关，弯矩和剪力可以表示为：

$$M_I(x) = A_I x - m(x) \quad (1)$$

$$Q_I(x) = A_I - q(x) \quad (2)$$

$m(x)$ 为与分布荷载有关的表达式，其一般表示为：

$$\begin{cases} m(x) = 0 & (0 \leq x \leq x_1) \\ m(x) = \int_{x_1}^x p(\xi)(\xi - x_1)d\xi & (x_1 < x \leq x_2) \\ m(x) = \int_{x_1}^{x_2} p(\xi)(\xi - x_1)d\xi + (x - x_2) \int_{x_1}^x p(\xi)d\xi & (x_2 < x \leq L) \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} q(x) = 0 & (0 \leq x < x_1) \\ q(x) = \int_{x_1}^x p(x)dx & (x_1 \leq x < x_2) \\ q(x) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx & (x_2 \leq x \leq L) \end{cases}$$

对于作用在  $x=x_1$  位置的集中荷载 P:

$$\begin{cases} m(x) = 0 & (0 \leq x \leq x_1) \\ m(x) = Px & (x_1 \leq x \leq L) \end{cases}$$

对于局部 $[x_1, x_2]$ 范围内的均匀分布荷载  $p(x)$ :

$$\begin{cases} m(x) = 0 & (x \leq x_1) \\ m(x) = \frac{1}{2} p(x - x_1)^2 & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ m(x) = \frac{1}{2} p(x_2 - x_1)^2 + p(x_2 - x_1)(x - x_2) & (x_2 \leq x \leq L) \end{cases}$$

对于局部 $[x_1, x_2]$ 范围内的三角形分布荷载  $p(x)$ ，在  $x_1$  处  $p(x_1)=0$ ， $x_2$  处荷载为  $p(x_2)=p$ :

$$\begin{cases} m(x) = 0 & (x \leq x_1) \\ m(x) = \frac{1}{6} p \frac{(x - x_1)^3}{x_2 - x_1} & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ m(x) = \frac{1}{6} p(x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} p(x_2 - x_1)(x - x_2) & (x_2 \leq x \leq L) \end{cases}$$

同时对于图 1c 所示的两端作用弯矩的铰支杆，由于中间未作用分布荷载，其弯矩为线性值，剪力为恒定值，符合下面表达式：

$$M_2(x)=A_2x+B_2 \quad (4)$$

$$Q_2(x)=A_2 \quad (5)$$

将式(1)、(2)式与(4)、(5)迭加。线性项相加后仍为线性项，因此合并有系数，得到：

$$M(x)=Ax+B-m(x) \quad (6)$$

$$Q(x)=A-q(x) \quad (7)$$

(6)、(7)式即为含有未知常量的非线性杆单元分布荷载作用下的内力的表达式。式中  $m(x)$  与  $q(x)$  仍满足积分关系，有  $m'(x)=q(x)$ 。

由材料力学理论，在由(6)、(7)式所示弯矩  $M(x)$  和剪力  $Q(x)$  作用下，杆中各截面转角  $\theta(x)$  和位移  $y(x)$  满足下面积分式：

$$\theta(x) = \int \frac{Ax + B - m(x)}{EI(x)} dx \quad (8)$$

$$y(x) = \iint \frac{Ax + B - m(x)}{EI(x)} dx dx + \int \frac{A - q(x)}{GA(x)} dx \quad (9)$$

参照文献[1]中的方法，将式(8)、(9)改写成定积分的形式。此时(8)、(9)式成为两端转角和位移的差值，则有：

$$\Delta\theta = \theta_0 + \int_0^L \frac{Ax + B - m(x)}{EI(x)} dx \quad (10)$$

$$\Delta y = y_0 + \theta_0 L + \int_0^L \left( \int_0^x \frac{A\xi + B - m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi \right) dx + \int_0^L \frac{A - q(x)}{GA(x)} dx \quad (11)$$

引入边界条件。由于非线性杆两端均为嵌固边界，因此有：

$$\theta_{x=0} = \theta_{x=L} = 0 \quad y_{x=0} = y_{x=L} = 0$$

同时将(10)、(11)式进一步离散化，将区间 $[0, L]$ 范围内的定积分写成离散点的数值积分形式。

$$\Delta\theta = A \sum_{i=1}^N \frac{Ax_i + B - m_i}{EI_i} \Delta x_i \quad (12)$$

$$\Delta y = \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^k \frac{Ax_i + B - m_i}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k + \sum_{i=1}^N \frac{A - q_i}{GA_i} \Delta x_i \quad (13)$$

分离变量，提出未知常数  $A$ 、 $B$ ，则有：

$$\Delta\theta = A \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{EI_i} \Delta x_i + B \sum_{i=1}^N \frac{1}{EI_i} \Delta x_i - \sum_{i=1}^N \frac{m(x_i)}{EI_i} \Delta x_i \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \Delta y = & A \left[ \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^k \frac{x_i}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k + \sum_{i=1}^N \frac{1}{GA_i} \Delta x_i \right] + B \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k - \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^k \frac{m(x_i)}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k \\ & - \sum_{i=1}^N \frac{q(x_i)}{GA_i} \Delta x_i \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{令：} \quad F_1 = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{EI_i} \Delta x_i = \int_0^L \frac{x}{EI(x)} dx$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{EI_i} \Delta x_i = \int_0^L \frac{1}{EI(x)} dx \\
F_3 &= \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^k \frac{x_i}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k + \sum_{i=1}^N \frac{1}{GA_i} \Delta x_i = \int_0^L \left( \int_0^x \frac{\xi}{EI(\xi)} d\xi \right) dx + \int_0^L \frac{1}{GA(x)} dx \\
F_4 &= \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^k \frac{1}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k = \int_0^L \left( \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi \right) dx \\
P_1 &= - \sum_{i=1}^N \frac{m(x_i)}{EI_i} \Delta x_i = - \int_0^L \frac{m(x)}{EI(x)} dx \\
P_2 &= - \sum_{k=1}^N \left( \sum_{i=1}^k \frac{m(x_i)}{EI_i} \Delta x_i \right) \Delta x_k = - \int_0^L \left( \int_0^x \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi \right) dx \\
P_3 &= - \sum_{i=1}^N \frac{q(x_i)}{GA_i} \Delta x_i = - \int_0^L \frac{q(x)}{GA(x)} dx
\end{aligned}$$

对于分布刚度已知的非线性杆，积分算子  $F_1$ 、 $F_2$ 、 $F_3$ 、 $F_4$  等是确定值。同样对于已知的杆分布荷载， $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  等积分算子也是确定值。则上两式可简写为：

$$\Delta\theta = AF_1 + BF_2 + P_1 \quad (16)$$

$$\Delta y = AF_3 + BF_4 + P_2 + P_3 \quad (17)$$

求解线性方程组，可得到未知变量  $A$ 、 $B$  的表达式。由于杆两端嵌固， $\Delta\theta = \Delta y = 0$ ，因此有：

$$A = \frac{F_2(P_2 + P_3) - F_4P_1}{F_1F_4 - F_2F_3} \quad (18)$$

$$B = \frac{F_3P_1 - F_1(P_2 + P_3)}{F_1F_4 - F_2F_3} \quad (19)$$

至此，非线性杆中作用横向分布荷载时杆中内力的分布函数已经完全确定，由式(18)、(19)可得到：

$$M(x) = \frac{F_2(P_2 + P_3) - F_4P_1}{F_1F_4 - F_2F_3} x + \frac{F_3P_1 - F_1(P_2 + P_3)}{F_1F_4 - F_2F_3} - m(x) \quad (20)$$

$$Q(x) = \frac{F_2(P_2 + P_3) - F_4P_1}{F_1F_4 - F_2F_3} - q(x) \quad (21)$$

在非线性有限元计算时，对(20)(21)式令  $x=0$  和  $x=L$  分别求得杆件左右两端点端弯矩和端剪力，即可得出有限元计算时所需得荷载项。在结构整体计算结束后，将由结构整体变形产生得杆中线性内力，迭加上式(20)(21)的由荷载产生的杆中分布内力，即可得到杆件的真实内力。

对于作用分布弯矩  $m(x)$  或集中弯矩  $M$  的情况与作用横向荷载类似，这里不再赘述。

## 2. 分布轴向力导算

如图 2 所示，当非线性杆  $[x_1, x_2]$  区间作用有轴向分布力  $p(x)$ ，参照前面横向分布力的作用的剪力的情况，可假定杆件轴向内力为一未知常量与描述分布荷载函数的组合：

$$N(x) = A - n(x) \quad (22)$$

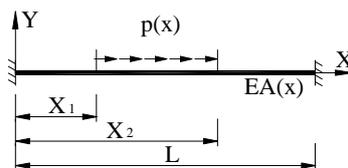


图 2、非线性杆作用轴向力荷载

Fig.2 The axial distributing load of nonlinear beam

对于作用于区间 $[x_1, x_2]$ 上的轴向分布力,  $n(x)$ 可有如下一般表达式:

$$n(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_1) \\ \int_{x_1}^x p(x)dx & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx & (x_2 \leq x) \end{cases} \quad (23)$$

对作用  $p(x)$  为  $x_1$  位置的集中力时, 有:

$$n(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_1) \\ P & (x_1 \leq x) \end{cases}$$

对作用  $p(x)$  为区间 $[x_1, x_2]$ 范围内大小为  $p$  的均布的轴向力时:

$$n(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_1) \\ p(x - x_1) & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ p(x_2 - x_1) & (x_2 \leq x) \end{cases}$$

其他类型的分布轴向力荷载依次类推。

由杆中轴力  $N(x)$  可求出各截面的轴向应变

$$\varepsilon_x = \frac{N(x)}{EA(x)}$$

沿长度方向积分, 则得到各点的位移

$$\delta_x = \int \frac{N(x)}{EA(x)} dx = \int \frac{A - n(x)}{EA(x)} dx$$

写成在 $[0, L]$ 区间定积分表示的两端位移差值, 并离散化, 则有

$$\Delta\delta_x = \int_0^L \frac{A - n(x)}{EA(x)} dx = \sum_{i=1}^N \frac{A - n_i}{EA_i} \Delta x_i$$

令:

$$S_1 = \int_0^L \frac{1}{EA(x)} dx = \sum_{i=1}^N \frac{1}{EA_i} \Delta x_i$$

$$S_p = \int_0^L \frac{n(x)}{EA(x)} dx = \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{EA_i} \Delta x_i$$

将上式分离变量, 同时代入  $N_1$ 、 $N_p$ , 则有:

$$\Delta\delta_x = AS_1 - S_p$$

引入边界条件。由于两端均为嵌固端, 有 $\Delta\delta_x=0$ , 则有:

$$A = S_p/S_1 \quad (24)$$

将(24)式代入(22)式, 则可得到非线性杆中作用轴向分布力时的轴向内力表达式:

$$N(x) = S_p/S_1 - n(x) \quad (25)$$

当  $x=0$  和  $x=L$  时, 即为此时的杆端轴力。进行适当的符号处理后, 即为有限元计算中的荷载矩阵的元素。在结构整体计算结束后, 将由整体变形产生的杆中内力, 加上(25)式表达的内力, 即为实际结构中非线性杆的轴向分布内力。

当作用力为集中力  $N_0$  时，可以采用更直接的积分方式。设作用力位置为  $x=x_1$ ，根据静力平衡条件，左端支座反力  $R_0$  与右端支座反力  $R_L$  之和与作用力  $N_0$  平衡，即：

$$N_0 = R_0 + R_L$$

$x_1$  以左杆件的轴向变形  $\delta_L$ ，与  $x_1$  以右轴向变形  $\delta_R$  分别如下：

$$\delta_L = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{R_0}{EA_i} \Delta x_i \quad \delta_R = \sum_{i=N_1}^{N_L} \frac{R_L}{EA_i} \Delta x_i = \sum_{i=N_1}^{N_L} \frac{(N_0 - R_0)}{EA_i} \Delta x_i \quad (26)$$

式中  $N_1$  指  $x=x_1$  的位置， $N_L$  指  $x=L$  的位置。令：

$$S'_1 = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{EA_i} \Delta x_i \quad S'_2 = \sum_{i=N_1}^{N_L} \frac{1}{EA_i} \Delta x_i$$

由变形协调条件，轴向变形  $\delta_L = \delta_R$ ，则有：

$$R_0 = \frac{S'_2}{S'_1 + S'_2} N_0 \quad R_L = \frac{S'_1}{S'_1 + S'_2} N_0 \quad (27)$$

### 3. 分布扭矩导算

杆中作用扭矩的情况与杆中作用轴向力的类似。当非线性杆  $[x_1, x_2]$  区间作用有分布扭矩  $p(x)$ ，可假定杆件扭矩为一未知常量与描述分布荷载函数的组合：

$$T(x) = A - t(x) \quad (28)$$

其中  $t(x)$  一般表达式为：

$$t(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq x_1) \\ \int_{x_1}^x p(x) dx & (x_1 \leq x \leq x_2) \\ \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx & (x_2 \leq x) \end{cases} \quad (29)$$

由杆中扭矩内力  $T(x)$  可求出单位长度的扭转角

$$\phi'_x = \frac{T(x)}{GJ(x)}$$

沿长度方向积分，则得到扭转角

$$\phi_x = \int \frac{T(x)}{GJ(x)} dx = \int \frac{A - t(x)}{GJ(x)} dx$$

写成定积分形式，并离散化。有

$$\Delta \phi_x = \int_0^L \frac{A - t(x)}{GJ(x)} dx = \sum_{i=1}^N \frac{A - t_i}{GJ_i} \Delta x_i$$

令：

$$Z_1 = \int_0^L \frac{1}{GJ(x)} dx = \sum_{i=1}^N \frac{1}{GJ_i} \Delta x_i$$

$$Z_p = \int_0^L \frac{t(x)}{GJ(x)} dx = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{GJ_i} \Delta x_i$$

分离变量，代入  $Z_1$ 、 $Z_p$ 。则有：

$$\Delta \phi_x = AZ_1 - Z_p$$

引入边界条件。由于两端均为嵌固端，有  $\Delta \phi_x = 0$ ，则有：

$$A = Z_p/Z_1 \quad (30)$$

将(30)式代入(28)式, 则可得到非线性杆中作用分布扭矩时的杆中扭矩内力表达式:

$$T(x) = Z_p/Z_1 - t(x) \quad (31)$$

对于  $x_1$  位置作用有集中扭矩  $T_0$  时的简化分析与集中轴向力类似, 这里不再赘述。

## 4. 算例

长度为  $L$  的均质杆抗弯刚度为  $EI$ , 忽略剪切变形。在区间  $[x_1, x_2]$  范围内作用均布横向荷载  $p(x)=p$ 。由(15) 及相关公式可得到:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{L^2}{2EI} & F_2 &= \frac{L}{EI} & F_3 &= \frac{L^3}{6EI} & F_4 &= \frac{L^2}{2EI} & F_1F_4 - F_2F_3 &= \frac{L^4}{12EI^2} \\ P_1 &= -\int_0^L \frac{m(x)}{EI} dx = -\frac{p}{2EI} \left[ \int_{x_1}^{x_2} (x-x_1)^2 dx - (x_2-x_1)^2(L-x_2) - 2(x_2-x_1) \int_{x_2}^L (x-x_2) dx \right] \\ &= -\frac{p}{6EI} (x_2-x_1) [(x_2-x_1)^2 + 3(x_2-x_1)(L-x_2) + 3(L-x_2)^2] \\ &= -\frac{p}{6EI} (x_2-x_1) [(L-x_1)(L-x_2) + (L-x_1)^2 + (L-x_2)^2] \\ P_2 &= -\frac{1}{EI} \int_0^L \left( \int_0^x m(\xi) d\xi \right) dx \\ &= -\frac{p}{EI} \left\{ \int_{x_1}^{x_2} \left[ \int_{x_1}^x \frac{1}{2} (\xi-x_1)^2 d\xi \right] dx + \int_{x_2}^L \int_{x_2}^x \left[ \frac{1}{2} (x_2-x_1)^2 + (x_2-x_1)(\xi-x_2) \right] d\xi dx \right\} \\ &= -\frac{p}{24EI} (x_2-x_1) [(x_2-x_1)^3 + 6(x_2-x_1)(L-x_2)^2 + 4(L-x_2)^3] \end{aligned}$$

由于忽略剪切变形,  $P_3 = 0$ 。

当  $x_1=0, x_2=L$  时, 即为满跨均布荷载, 有关公式简化为

$$m(x) = \frac{1}{2} px^2 \quad q(x) = px \quad P_1 = -\frac{pL^3}{6EI} \quad P_2 = -\frac{pL^4}{24EI}$$

将  $F_1 \sim F_4$  及  $P_1 \sim P_2$  代入前面(20)、(21)式, 未知参数  $A$ 、 $B$  的值

$$A = \frac{1}{2} pL \quad B = -\frac{1}{12} pL^2$$

弯矩和剪力分别为:

$$M(x) = \frac{1}{2} pLx - \frac{1}{12} pL^2 - \frac{1}{2} px^2$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} pL - px$$

很明显计算结果与一般方法计算结果相同。

### 参考文献:

- [1] 谢靖中、李国强, 一种新的集成非线性杆件单元刚度矩阵的方法[J], 工程力学(待发)  
Xie, J.Z., Li, G.Q., A New Method of integrating Stiffness Matrix of Nonlinear Frame Element[J], Engineering Mechanics,(To be Published)
- [2] Zeris, C.A. and Mahin, S.A. Analysis of Reinforced Concrete Beam-Column Under Uniaxial Excitation." Journal of Structural Engineering[J], ASCE, 1988, 114(ST4): 804-820
- [3] Zeris, C.A. and Mahin, S.A. Behavior of Reinforced Concrete Structures Subjected to Biaxial Excitation."

- [4] Taucer, F., Spacone, E. and Fillippou, F.C. A Fiber Beam-Column Element for Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures[R]. EERC Report 91-17, 1991, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

## A Method of Directly Integrating Nonlinear Frame Load Matrix Based on Integration Factors

Jingzhong Xie      Guoqiang Li

(The Architectural Engineering Department of Tongji Univ., Shanghai 200092)

**Abstract:** A Method directly based on integration factors is now developed to form load matrix of nonlinear beam. The method expresses the inner force of nonlinear beam excited by distributing load as the combination of two parts: the one is a linear function with unknown constants of nodal moment, and the other is a known function just determined by the distributing load itself. Both functions can be separately integrated as many constant factors. With the boundary conditions of two nodes, the unknown constants of first linear function can be expressed by these integration factors, and so far the whole function of inner force and the load matrix of nonlinear beam are gained. The method never adopts any hypothesis and is analytic and accurate. It is fit for all kind of nonlinear frame with arbitrary distributing load to gain load matrix. The results is more accurate than the Guass numerical integration for beams which with un-continual nonlinear stiffness or un-continual distributing load.

**Key Words:** Nonlinear Beam, Load Matrix

### 修改稿

论文编号：01-203

论文题目：非线性杆单元荷载矩阵积分算子直接集成算法

修改说明:

- 1、增加第一作者信息；
- 2、插图加英文名称；中文参考文献加英文名称
- 3、改正正文部分打印错误；
- 4、部分修改中、英文摘要，