

# 变截面梁预应力计算的积分算子法

谢靖中

(上海交通大学土木工程系, 上海 200030)

**摘要:** 本文将积分算子法用于变截面梁预应力问题的计算, 提出了一种新型计算方法。该方法将多段变截面梁作为一个计算单元处理, 直接计算多段预应力索等效节点力和单元内力, 包含了变截面梁刚度分布对等效节点荷载的影响, 包含了变截面剪切变形影响。该方法克服此前方法的缺陷, 为变截面梁预应力的计算提供了一种精确计算方法。

**关键词:** 变截面梁, 预应力, 等效节点荷载, 积分算子法, 直接积分

**中图分类号:** TU313 **文献标志码:** A

## The Method of Integration Operators for Prestressed Non-uniform Beam

XIE Jing-zhong

(Depart. of Civil Engineering, Jiaotong Univ. of Shanghai, Shanghai 200030, China)

**Abstract:** Based on the method of integration operators, a new method of computing equivalent nodal forces and inner forces for prestressed non-uniform beam is presented in this paper. The non-uniform beam with multiple spans is treated as a single element, and the equivalent nodal forces and inner forces of multiple prestressed cables are directly computed. The proposed method successfully includes the influences of varied stiffness and shear deformation. It is an accurate method for computing prestressed non-uniform beam, which overcomes the shortage of previous methods.

**Key words:** non-uniform beam, prestressed cable, equivalent nodal force, method of integration operators, direct integration

### 1 引言

预应力变截面梁在实际工程中经常采用。如大跨预应力连续梁端部弯矩很大, 将两端局部截面加大形成加腋是常用的处理方式。再如跨度较大的预应力次梁, 为减小端部弯矩对主梁的受扭影响, 往往将端部截面减小形成鱼腹梁。

预应力是一种特殊的自平衡作用, 预应力索在变截面梁上产生的内力, 必定受梁刚度分布的影响。当前计算预应力主要有两类, 一种是等效荷载法, 一类是有限元插值函数法。这两类方法均不能有效地处理变截面梁的预应力问题。

由著名学者林同炎提出的等效荷载法概念明确<sup>[1~4]</sup>, 且计算过程相对简单, 被广泛采用。但为了

便于使用, 采用很多简化的处理, 使成为一种近似的计算方法。

有限元插值函数法, 通过选取合适的位移插值函数, 或内力插值函数, 根据有限元基本原理, 由插值位移场、或内力场积分得到预应力索的等效节点力。根据位移函数插值<sup>[5~8]</sup>, 也称为刚度法, 这种方法在根据位移场积分预应力等效节点力时, 未能包含分布刚度的因素, 因此不能有效处理变截面梁预应力计算问题。根据内力场函数插值, 由于预应力产生内力的复杂性, 基本上不能选取正确的插值函数。有限元插值函数法另外一个缺陷是, 该方法在多数情况下需要借助 Gauss 积分求解。众所周知, 高斯积分达到精确解的前提是被积函数是单一

多项式。而预应力索多数情况下由多段抛物线或折线组成，且在考虑索倾角影响时被积函数也不再是多项式，这必然导致计算结果存在系统误差。

文献[9]、[10]中提出了计算材料非线性梁柱单元刚度矩阵、单元荷载矩阵的积分算子法，这是一种普适性的通用算法。本文进一步扩展该方法，用于变截面梁预应力问题的计算。

利用积分算子法，本文方法能对加腋、鱼腹等多段变截面梁作为一个单元，直接计算单元刚度、

荷载矩阵，不需要将梁按在变截面处分段，极大地简化了处理过程。与此同时，对变截面梁的多段预应力索，直接计算等效节点力和单元内力。本文方法能有效避免此前各类方法的缺陷，是一种精确计算方法。此外，本文还将对积分算子法，在文献[9]、[10]基础上作进一步阐述，指出积分算子相互之间的关联性。本文还结合变截面梁预应力问题，分析了直接积分法计算积分算子的收敛性。

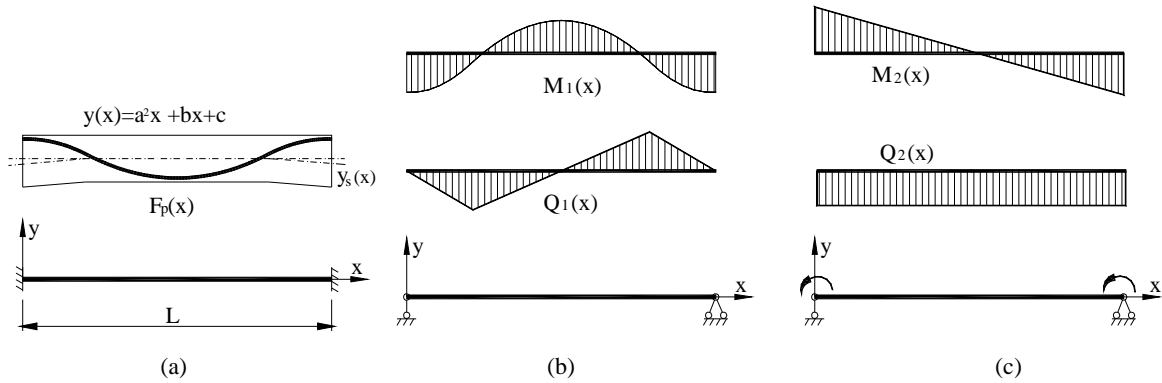


图 1、两端嵌固梁上预应力索产生内力

Fig.1 The inner forces of fixed beam under prestressed cable

## 2 弯矩、剪力

对于图 1(a)所示的 n 段预应力索，索形状函数可表示为：

$$y(x) = a_i x^2 + b_i x + c \quad (i=1,2...n) \quad (1)$$

索函数根据梁的纵向轴定义，纵向轴位于主要截面段的形心位置。由于截面变化，截面形心沿纵向轴的距离由附加形心函数  $y_s(x)$  表示。扣除各项预应力损失后，预应力索预加拉力设为函数  $F_p(x)$ 。 $F_p(x)$  可以是常数，也可以是有变化的函数。 $F_p(x)$  的方向沿索的切线方向。

如图 1(a)所示两端嵌固梁，在预应力索预拉力作用下产生的截面内力，受两方面因素影响。一种是索拉力，另一种是支座的约束作用。在梁纵向范围内，由于没有其他荷载作用，梁内力的变化趋势与索拉力的各项分量一致。因此对于嵌固梁，其内力可以等价地分解成两个铰支静定梁的内力叠加之和：一个为作用索拉力的铰支的静定梁，如图 1(b)；另一个为两端作用端弯矩的铰支静定梁，如图 1(c)。

对于图 1(b)所示铰支梁，预应力索预拉力与截面内力自平衡，不产生弯矩、剪切等支座反力，因此分布内力直接与索拉力相关。因此弯矩、剪力的可表示为：

$$M_1(x) = -m(x) \quad (2)$$

$$Q_1(x) = -q(x) \quad (3)$$

$m(x)$ 、 $q(x)$ 是与索拉力直接相关的特征函数。在考虑索倾角、附加形心函数影响的情况下，表达式如下：

$$m(x) = F_p(x) \frac{a_i x^2 + b_i x + c_i + y_s(x)}{\sqrt{1 + (2a_i x + b_i)^2}} \quad (i=1,2...n) \quad (4)$$

$$q(x) = -F_p(x) \frac{2a_i x + b_i + y_s'(x)}{\sqrt{1 + (2a_i x + b_i)^2}} \quad (i=1,2...n) \quad (5)$$

对于图 1(c)所示的两端作用弯矩的铰支静定梁，由于中间未作用分布荷载，其弯矩为线性值，剪力为恒定值。则弯矩、剪力可由下式表示：

$$M_2(x) = Ax + B \quad (6)$$

$$Q_2(x) = -A \quad (7)$$

将(2)、(3)式与(6)、(7)式迭加, 得到包含未知量的两端嵌固梁的内力表达式:

$$M(x) = Ax + B - m(x) \quad (8)$$

$$Q(x) = -A - q(x) \quad (9)$$

在弯矩  $M(x)$  作用下, 对曲率沿梁长度积分, 得到各截面的转角:

$$\theta(x) = \int \psi(x) dx = \int \frac{Ax + B - m(x)}{EI(x)} dx \quad (10)$$

将上式由一般积分式改为定积分式。由定积分的意义可知, 关于截面转角在  $[0, x]$  区间上的定积分, 表示  $x$  和 0 位置转角的差值。设 0 位置的截面转角为  $\theta_0$ , 则上式可等价:

$$\theta(x) = \int_0^x \frac{A\xi + B - m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi + \theta_0 \quad (11)$$

对转角  $\theta(x)$  再次积分得到弯曲产生的位移:

$$\delta_M(x) = \int \theta(x) dx \quad (12)$$

同时, 预应力索拉力作用产生的剪切变形, 由剪切变形产生的位移:

$$\delta_Q(x) = \int \frac{Q(x)}{GA(x)} dx \quad (13)$$

两种位移叠加, 得到弯、剪作用下总的侧移:

$$\delta(x) = \delta_M(x) + \delta_Q(x) \quad (14)$$

将(12)、(13)式代入(14)式, 并且将(12)、(13)式由一般积分式改为  $[0, L]$  区间的定积分表达式。由定积分意义可知, 这时定积分的值表示梁两端位移的差值:

$$\begin{aligned} \Delta\delta = & \int_0^L \left( \int_0^x \frac{A\xi + B - m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi \right) dx \\ & + \theta_0 L - \int_0^L \frac{A + q(x)}{GA(x)} dx \end{aligned} \quad (15)$$

定义如下积分算子:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^L \frac{x}{EI(x)} dx \\ F_2 &= \int_0^L \frac{1}{EI(x)} dx \\ F_3 &= \int_0^L \left( \int_0^x \frac{\xi}{EI(\xi)} d\xi \right) dx - \int_0^L \frac{1}{GA(x)} dx \\ F_4 &= \int_0^L \left( \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi \right) dx \\ P_1 &= - \int_0^L \frac{m(x)}{EI(x)} dx \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= - \int_0^L \left( \int_0^x \frac{m(\xi)}{EI(\xi)} d\xi \right) dx \\ P_3 &= - \int_0^L \frac{q(x)}{GA(\xi)} dx \end{aligned} \quad (17)$$

积分算子  $F_1 \sim F_4$  与截面刚度相关, 是已知值的。积分算子  $P_1 \sim P_3$  与荷载特征函数相关。对于预应力索荷载, 当索形状函数  $y(x)$ 、索轴拉力函数  $F_p(x)$ 、附加形心函数  $y_s(x)$  均已知时, 积分算子  $P_1 \sim P_3$  为已知值。则(11)、(15)式可用已知的积分算子表示:

$$\Delta\theta = AF_1 + BF_2 + P_1 \quad (18)$$

$$\Delta\delta = AF_3 + BF_4 + P_2 + P_3 + \theta_0 L \quad (19)$$

由于计算等效节点荷载时梁两端点嵌固, 因此起点转角为 0, 并且转角、位移的增量均为 0, 即  $\theta_0 = \Delta\theta = \Delta\delta = 0$ 。因此根据上面两式, 可求出未知常数 A、B 的值:

$$A = \frac{F_2(P_2 + P_3) - F_4 P_1}{F_0} \quad (20)$$

$$B = \frac{F_3 P_1 - F_1(P_2 + P_3)}{F_0} \quad (21)$$

$$F_0 = F_1 F_4 - F_2 F_3 \quad (22)$$

至此, 两端嵌固均质截面梁在预应力索轴力作用下产生的内力已经确定。内力分布函数由下面包含积分算子的显示表达式表示:

$$\begin{aligned} M(x) = & \frac{F_2(P_2 + P_3) - F_4 P_1}{F_0} x \\ & + \frac{F_3 P_1 - F_1(P_2 + P_3)}{F_0} - m(x) \end{aligned} \quad (23)$$

$$Q(x) = \frac{F_2(P_2 + P_3) - F_4 P_1}{F_0} - q(x) \quad (24)$$

相应的, 嵌固支座对预应力梁端部的约束力, 即参与结构整体计算的等效节点力, 也已经确定。根据(6)、(7)式, 由 A、B 值表示等效节点力为:

$$\begin{aligned} Q_0 &= -A & Q_L &= -A \\ M_0 &= B & M_L &= AL - B \end{aligned} \quad (25)$$

(16)式中与刚度相关的积分算子  $F_1 \sim F_4$  相互之间并不独立, 有如下关联关系:

$$F_1 = F_2 L - F_4 \quad (26)$$

利用分步积分方法, 可以证明如下:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^L \frac{x}{EI(x)} dx = \left[ x \int \frac{1}{EI(\xi)} d\xi \right]_0^L - \int_0^L \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi dx \\ &= L \int_0^L \frac{1}{EI(x)} dx - \int_0^L \int_0^x \frac{1}{EI(\xi)} d\xi dx = F_2 L - F_4 \end{aligned}$$

利用这种关联关系, 二次积分算子  $F_4$  可以不直

接计算，以减小计算工作量。在利用直接积分求解时，能显著提高积分精度。将该关联关系引入文献[9]所列出的非线性杆单元弯剪刚度矩阵 $[K_{MQ}]$ ，将表明该矩阵是严格对称的。

### 3 轴向力

如图 1 所示两端嵌固梁上作用预应力索，在支座处将产生轴向力。预应力梁轴力函数可写成如下式：

$$N(x) = A - n(x) \quad (27)$$

$A$  是待定常数，反映梁的支座反力值。 $n(x)$ 为预应力索轴力的特征函数，在计入斜率影响时，可写为：

$$n(x) = -F_p(x) \frac{1}{\sqrt{1 + (2a_i x + b_i)^2}} \quad (28)$$

轴力  $N(x)$  产生轴向应变  $\varepsilon_x$ ，沿轴向积分得到各点的位移。

$$\delta_x = \int \varepsilon_x dx = \int \frac{A - n(x)}{EA(x)} dx \quad (29)$$

将上式写成 $[0, L]$ 区间定积分，即表示梁两端的纵向位移差值，得到：

$$\Delta\delta_x = \int_0^L \frac{A - n(x)}{EA} dx \quad (30)$$

定义积分算子：

$$S_1 = \int_0^L \frac{1}{EA} dx = \frac{L}{EA}$$

$$S_p = \int_0^L \frac{n(x)}{EA} dx \quad (31)$$

代入以上积分算子。由于均为嵌固端， $\Delta\delta_x = 0$ 。则可得待定常数  $A$  的值：

$$A = S_p / S_1 = \frac{EA}{L} S_p \quad (32)$$

将  $A$  值代入(27)式，则可最终得到由积分算子表示的轴力分布函数：

$$N(x) = \frac{EA}{L} S_p - n(x) \quad (33)$$

相应的，轴向等效节点力为：

$$N_0 = N_L = \frac{EA}{L} S_p \quad (34)$$

### 4 积分算子分析

本文方法直接从结构力学的基本原理出发，在

公式推导过程中未采用任何假定，因此是一种精确的计算方法。本文方法的总体计算精度，直接由计算积分算子方法的精确性决定。由于积分算子是相对简单的、规则化的定积分式，可以根据不同的情况，选择合适的计算方法，使达到或趋近精确解。当被积函数较为简单时可以直接得到解析解，当被积函数是满足高斯积分条件的连续多项式时也可以采用高斯积分。

对于本文所讨论的多段变截面梁上作用预应力的问题，由于积分算子中包含的截面物理参数  $EI(x)$ 、 $GA(x)$  和  $EA(x)$  是变化量，并且在截面变化分段与预应力索的分段并不一致，因此积分算子需要借助直接积分计算。

下面结合具体的例子，分析直接积分计算的精度。在(16)、(17)、(31)各式的积分算子中，二次积分算子可以在一次积分算子基础上再次积分得到，因此这里仅分析二次积分算子计算精度。

如图 2 所示的变截面梁上抛物线索  $y = a^{-2}x^2$  作用于 $[0, a]$ 区间，索拉力为恒定值。变截面梁左端高度为右端的 1.5 倍，宽度不变。改变直接积分分段数，计算二次积分算子  $F_3$ 、 $P_2$  值。以不再随积分分段数增加而改变的恒定值作为精确解，2~30 个积分分段数的相对精度列于图 3。

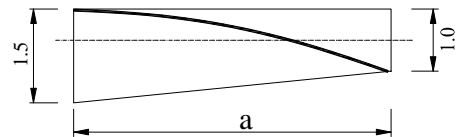


图 2、变截面梁上作用一段抛物线索

Fig.2 A Section varied beam with a parabola cable

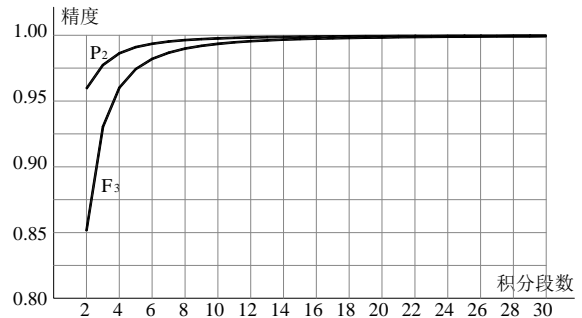


图 3、算子精度与积分分段数的关系

Fig.3 The relationship between accuracy of operators and integration subdivisions

从图中可看出，随着积分分段数的增加，二次积分算子的收敛速度很快，其中于预应力荷载相关的

算子  $P_2$  的收敛速度高于算子  $F_3$  的收敛速度。对于算子  $F_3$ ，积分段数为 5 时误差为 2.57%，段数为 10 时误差 0.65%，段数为 20 时误差 0.16%，段数为 30 时误差 0.07%。当积分段数为 100 时误差仅 0.006%，完全达到了实际意义上的精确解，已经小于采用 Gauss 积分的误差值。

在实际应用中，对各梁段、抛物线段，可以采用 100 个均分的积分段。由于直接积分只是简单的代数叠加，计算速度很快，可以满足实际计算的要求。

### 5 算例与分析

#### 1、加腋悬臂梁上抛物线预应力索

这里通过计算悬臂梁上抛物线预应力索产生内力，验证本文方法的正确性。因为悬臂梁作为静定结构，可直接根据本文特征函数(4)、(5)式计算精确解。虽然悬臂梁较为简单，但对于程序计算而言，与超静定连续梁、整体结构中的梁一样，遵循相同步骤和原则，因此可以用于验证本文方法的正确性。本文方法已经编入作者开发的有限元软件 STRAT，算例由该软件计算。

悬臂梁如图 4 所示，根部加腋高度 1.2，加腋长度 2.0，为两段变截面梁。预应力索拉力为 100kN，形状函数为：

$$y=0.40 \quad (x \leq 1.0)$$

$$y=-0.025x^2+0.05x+0.4 \quad (x > 1.0)$$

索的分段与变截面分段不一致。计算包含索倾角的影响。

积分段数取 100，各项数据列于表 1。本文方法计算结果，在计算数值精度范围内，与精确解完全一致。

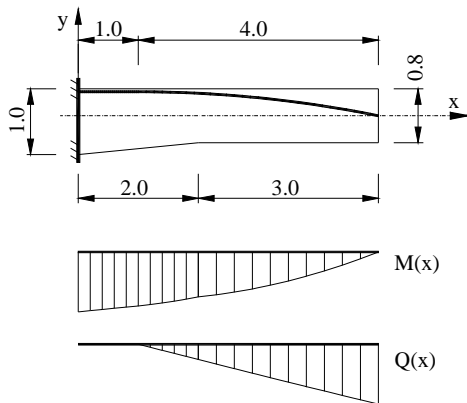


图 4、悬臂梁上作用抛物线预应力索

Fig.4 A cantilever beam under prestressed parabola cable

表 1、抛物线索作用下悬臂梁内力

位置(x)		0.0	1.0	2.0	3.5	5.0
弯矩 M	本文方法	50.0	45.0	37.4532	24.1868	0.0
	理论解	50.0	45.0	37.4532	24.1868	0.0
剪力 Q	本文方法	0.0	0.0	4.9938	12.4035	19.6116
	理论解	0.0	0.0	4.9938	12.4035	19.6116

#### 2、变截面连续梁

如图 5 所示连续梁，中间跨加腋梁截面 0.3m×0.9m，加腋高度 1.2m，加腋长度 2m。材料  $E=3.0 \times 10^7$ ， $\mu=0.25$ 。作用三段抛物线索，索形状如图所示，索拉力 100kN。由于变截面梁的预应力等效节点力的影响与相连构件的刚度有关，因此计算中包含两端连续梁和相连柱。

用本文方法计算预应力等效节点力和最终的预应力梁内力。同时在本文方法基础上，忽略加腋的影响，积分算子  $P_1 \sim P_3$  按均质截面计算，相当于一元有限元插值函数法的计算结果。比较加腋对等效节点力及最终内力的影响，结果见表 2、3。

表 2、等效节点力

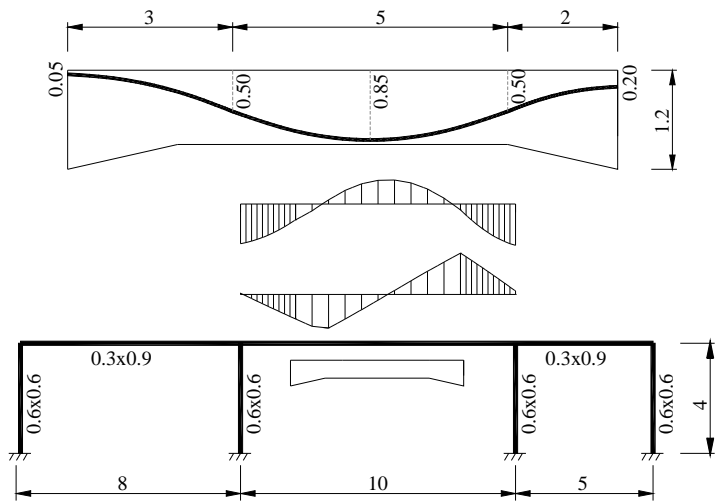


图 5、加腋连续梁

Fig.5 The continuous beams with varied sections

Table 2. Equivalent nodal forces

	弯矩 M		剪力 Q	
	左端	右端	左端	右端
本文方法	8.5866	23.3000	3.1887	3.1887

忽略加腋	12.7259	15.3068	2.8033	2.8033
误差	48.2%	34.3%	12.1%	12.1%

表 3、梁内力

Table 3. Inner forces of beam

	弯矩 M			剪力 Q	
	左端	跨中	右端	$x=2$	$x=8$
本文方法	54.0096	32.3070	56.2368	17.6268	29.7224
忽略加腋	50.2461	37.3709	49.8724	17.8869	29.4623
误差	1.8%	15.67%	11.32%	1.48%	0.88%

从表中可看出，预应力计算中忽略加腋的影响，误差显著。其中对弯矩的影响大于剪力的影响。忽略加腋影响，将显著改变弯矩在端部、跨中的分配，使端部弯矩偏小，跨中偏大。

## 6 结 语

本文将计算梁柱单元刚度、荷载矩阵的积分算子法，发展到变截面梁预应力问题的计算。提供了一种新的精确计算变截面梁预应力问题的有效方法。

本文方法将计算预应力等效节点荷载的复杂积分过程拆分成一些相对简单的、规则化积分算子，通过积分算子的组合，直接得到预应力作用下的构件单元内力显示表达式，从而得到等效节点力和单元内力。

本文方法将多段变截面梁作为一个计算单元进行处理，直接计算多段变截面梁的等效节点力和内力，不需要将梁在变截面处分段，极大地简化了处理过程。该方法能避免此前各类方法的缺陷，包含了变截面梁刚度分布对预应力等效节点荷载的影响，包含了变截面剪切变形影响。本文方法没有采用任何假定，是一种精确计算方法。

本文还结合具体算例，分析了直接积分方法计算积分算子的精度和收敛性，表明直接积分是一种有效的方法。

## 参考文献：

- [1] T.Y.Lin. Load-Balancing Method for Design and Analysis of Prestressed Concrete Structures[J]. ACI Journal, 1963
- [2] 陈永春、陈国梅. 预应力超静定结构的等效荷载计算[J]. 建筑结构学报, 1988, 9(2): 45-49.  
Chen Yongchun, Chen Guomei. Computation of equivalent

- nodal forces for prestressed structures [J]. Journal of Building Structures, 1988, 9(2):45-49. (in Chinese)
- [3] 杨建明, 吕志涛. 预应力混凝土超静定结构次弯矩的简捷计算[J]. 建筑结构学报, 1989, 10(3):30-36.  
Yang Jianming, Lv Zhitao. A practical method of computing sub-moment in prestressed structures [J]. Journal of Building Structures, 1989, 10(3):30-36. (in Chinese)
- [4] 杨建明. 预应力混凝土结构的当量荷载计算[J]. 建筑结构学报, 1997, 18(5):2-11.  
Yang Jianming. Calculation of analogical loads for prestressed concrete structures [J]. Journal of Building Structures, 1997, 18(5):2-11. (in Chinese)
- [5] Dall'Asta A., and Dezi L. Nonlinear behavior of externally prestressed composite beams: Analytical model[J]. Journal of Structural Engineering, ASCE, 1998, 124(5), 588-597
- [6] Dal'Asta A., and Zona A., Finite element model for externally prestressed composite beams with deformable connection[J], Journal of Structural Engineering, ASCE, 2005, 131(5), 706-714
- [7] Wu X.H., Otani S., and Shiohara H., Tendon model for nonlinear analysis of prestressed concrete structures, Journal of Structural Engineering[J], ASCE, 2001, 127(4), 398-405
- [8] Ariyawardena N., and Ghali A., Prestressing with unbonded internal or external tendons: analysis and computer model[J], Journal of Structural Engineering, ASCE, 2002, 128(12), 1493-1501
- [9] 谢靖中, 李国强. 一种新的集成非线性杆件单元刚度矩阵的方法[J]. 工程力学, 2002, 19(6):126~130  
Xie Jingzhong, Li Guoqiang. A new method for integrating stiffness matrix of nonlinear frame element, Engineering Mechanics, 2002, 19(6):126-130. (in Chinese)
- [10] 谢靖中, 李国强. 非线性杆件单元荷载矩阵积分算子直接集成算法[J], 计算力学学报, 2003, 20(4):490-494.  
Xie Jingzhong, Li Guoqiang. Method of directly integrating nonlinear frame load matrix based on integration factors. Chinese Journal of Computational Mechanics. 2003, 20(4): 490-494. (in Chinese)