

未正式发表研究成果，
如有引用，请注明“佳构 STRAT 软件技术资料”

修正 D 值法及楼层侧向刚度的计算

谢靖中 (2005. 03)

(上海交通大学土木工程系, 上海华山路 1954 号, 200030)

摘要: 楼层侧向刚度计算是工程设计中尚未很好解决的实际问题。本文分析了楼层侧向刚度的影响因素, 认为楼层侧向刚度是一种相对值, 应放置在整体结构中进行计算, 需要包含相邻楼层的弹性约束、基底嵌固等边界条件, 并提出计算楼层侧向刚度的合理模型。在此基础上, 本文提出了计算梁、柱、墙侧向刚度的“修正 D 值法”, 及计算支撑侧向刚度的相关公式。本文提出了完整系统的实用计算方法。经算例表明, 本文方法能客观地反映楼层侧向刚度分布规律, 且具有较高的计算精度。

关键词: 楼层侧向刚度, 修正 D 值法, 有限元法

The Modified D-Value Method and Computation of Storey Lateral Stiffness

Xie Jing-Zhong¹ Li Guo-Qiang² Chen Xiao-Bao¹

(1, Depart. of Civile Engineering, Jiaotong Univ. of Shanhai, Huashan Road 1954, Shanghai, 200030)

(2, Depart. of Building Engineering, Tongji Univ, Siping Road 1239, Shanghai, 200092)

Abstract: The influencing factors of storey lateral stiffness are analyzed at first in this paper. It is related that the storey lateral stiffness as general statistical parameters should be calculated as a part of entire structures, with necessary boundary conditions, such as lastic restrains of close storeys and fixed constrains of basement. And then, a rational model for storey lateral stiffness has been advocated. The modified D-value method is developed for computing lateral stiffness of beam, column and wall, and series of formulations for computing lateral stiffness of braces are also developed. At last, The proposed method is well verified by many examples with high precision.

Keywords: Storey Lateral Stiffness, Modified D-Value Method, FEM Method

一、引言

楼层侧向刚度比用于判断建筑结构侧向刚度沿高度的分布状态, 是建筑设计中的重要指标, 各类规范^[1,2,3]对此均有明确的控制要求。但各类规范并没有提供楼层侧向刚度的计算方法, 这给工程设计带来很大的困难。

《高层规程JGJ3-2002》^[2]建议根据等效剪切面积与层高的比值计算楼层侧向刚度, 虽然规程将该方法限定于底部一层大空间的转换层结构中转换层上下层的刚度比计算, 但在实际上该方法也被用于多用于各种结构的计算。该方法计算方法简洁, 但未考虑水平梁对侧向刚度的影响, 同时将柱墙的变形特点完全分开, 计算的结果与实际情况差别较大。文献[4, 5]介绍了根据构件的抗侧移刚度计算刚度中心的方法, 文献[6]介绍了利用有限元整体模型迭代计

算楼层刚度中心的方法，但未涉及具体计算构件抗侧刚度的计算。

针对计算楼层侧向刚度的计算，需要首先明确楼层侧向刚度概念的意义。

首先，楼层不是一个独立的受力结构，而是是结构整体中的一部分。楼层侧向刚度是为了体现结构竖向刚度分布特征的统计量。因此楼层侧向刚度是一个相对值，需要在结构整体中考虑一个楼层的刚度，需要包含必要的边界条件，如上下相邻楼层的弹性约束、基底嵌固等影响。

其次，整体结构的变形，总是沿高度累积的。这种累积变形与楼层本身的侧向刚度并不相关。因此在计算楼层侧向刚度时，需要剔除这种累积变形的影响。文献[7]提出了反映楼层变形的区格广义剪切变形的概念，楼层侧向刚度在一定程度上是与该变形对应的量。

基于以上分析，楼层侧向刚度的计算应采用如图 1 所示的模型。在结构整体模型基础上，计算第 k 层的侧向刚度时，约束该层底面的水平及竖向平动位移，但容许转动位移。采用合适的方式，计算侧移与施加外力的关系，或者统计层内构件的刚度，从而得到楼层的侧向刚度。该模型避免了竖向累积变形的影响，同时保留了相邻楼层的约束作用，计算结果将客观地反映整体结构中楼层刚度的相对大小。

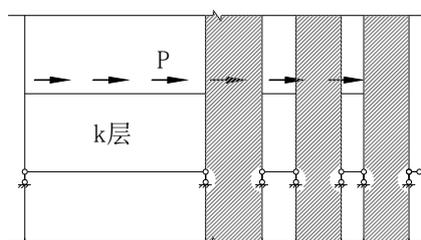


图 1、楼层侧向刚度的计算模型

Fig.1. The model for storey lateral stiffness

针对以上模型，可以采用有限元方法计算。但有限元方法需要在结构整体模型基础上，逐层施加约束进行变结构、变荷载计算，计算量非常大。并且有限元方法需要首先迭代计算刚度中心，然后才能由加在刚度中心的外力与层侧移的关系间接得到楼层刚度，过程较为繁琐。有限元方法不便于在实际中应用，但作为一种精确方法，可以用于其它计算方法的比较。

本文采用由单个构件的抗侧刚度统计得到楼层侧向刚度的方法，但由于楼层侧向刚度的特殊性，各类构件的计算均须采用相应的处理措施。

1、梁柱。经典的 D 值法主要针对规则框架结构，采用很多的假定，直接采用将会有较大的误差。本文根据图 1 模型，重新推导有关公式，提出修正 D 值法，使包含各主要因素，适应楼层侧向刚度的计算要求。

2、剪力墙。工程中墙截面长度的变化范围很大，实际上与柱的差别只是弯、剪变形的比例不同。因此墙采用与柱相同的计算方法，计算中考虑剪切变形的刚度折减。

3、支撑。支撑与相连梁柱共同工作，相连梁柱的变形直接影响支撑的抗侧刚度。本文针对图 1 的计算模型，推导了相关计算公式。

二、修正 D 值法

计算结构第 k 层的侧向刚度， k 层层高为 h 。取 k 层的柱 AB，和与该柱上下端点相连的梁，形成一个隔离体。考虑楼层位于结构中部，上下相邻楼层柱对隔离体存在转角约束作用，隔离体中包含上下楼层柱，如图 2 所示。

根据图 1 的计算模型，针对楼层侧向刚度的计算特点，采用如下假定：1、假定水平梁两端转角相同；2、忽略上下层柱远端转角产生的次生变形。

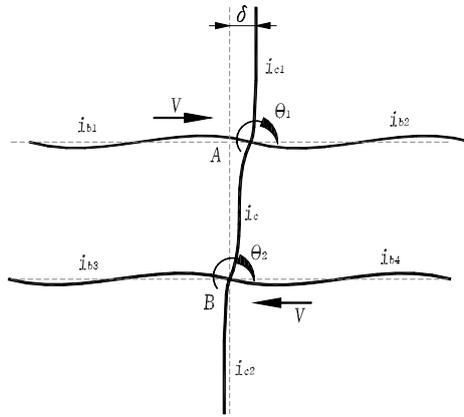


图 2、与 k 层柱 AB 相连的梁、柱

Fig.2 The linked members of column AB at storey k

设柱 AB 在端点 A 产生转角为 θ_1 ，端点 B 产生转角为 θ_2 ，则根据两点弯矩平衡条件，可得到如下方程：

$$(6i_{b1} + 6i_{b2})\theta_1 + 4i_c\theta_1 + 2i_c\theta_2 + 4i_{c1}\theta_1 = 6\frac{\delta}{h}i_c \quad (1)$$

$$(6i_b + 6i_{b4})\theta_2 + 4i_c\theta_2 + 2i_c\theta_1 + 4i_{c2}\theta_2 = 6\frac{\delta}{h}i_c \quad (2)$$

其中 i_{c1} 、 i_{c2} 为与 AB 柱相连的上下层柱的线刚度。虽然上下楼层不直接受力，但还存在次生的转角、侧移变形。因此 i_{c1} 、 i_{c2} 可折减后参与计算。折减系数可取 0.2~0.5，对于柱取较小值，墙取较大值。令：

$$\begin{aligned} \alpha_{b,T} &= \frac{i_{b1} + i_{b2}}{i_c} & \alpha_{c,T} &= \frac{i_{c1}}{i_c} \\ \alpha_{b,B} &= \frac{i_{b3} + i_{b4}}{i_c} & \alpha_{c,B} &= \frac{i_{c2}}{i_c} \end{aligned} \quad (3)$$

上面(1)、(2)式可整理为：

$$(3\alpha_{b,T} + 2\alpha_{c,T} + 2)\theta_1 + \theta_2 = 3\delta/h \quad (4)$$

$$(3\alpha_{b,B} + 2\alpha_{c,B} + 2)\theta_2 + \theta_1 = 3\delta/h \quad (5)$$

再令：

$$\beta_T = 3\alpha_{b,T} + 2\alpha_{c,T} + 2 \quad \beta_B = 3\alpha_{b,B} + 2\alpha_{c,B} + 2 \quad (6)$$

由上述方程组，可得到由侧移 δ 表示的转角表达式：

$$\theta_1 = \frac{3\delta}{h} \cdot \frac{\beta_T - 1}{\beta_T \beta_B - 1} \quad \theta_2 = \frac{3\delta}{h} \cdot \frac{\beta_B - 1}{\beta_T \beta_B - 1} \quad (7)$$

柱 AB 本身的端部弯矩与剪力 V 有如下关系：

$$V = [12\frac{i_c}{h}\delta - 6i_c(\theta_1 + \theta_2)]/h \quad (8)$$

将(7)式代入(8)式，整理后得到：

$$D_M = \frac{V}{\delta} = \frac{6i_c}{h^2} (2 - 3 \frac{\beta_B + \beta_T - 2}{\beta_B \beta_T - 1}) \quad (9)$$

柱剪力 V 为作用在 k 层楼面的水平作用力分配到该柱上的量。 D_M 即为计算第 k 层侧向刚度时，柱 AB 的对楼层侧向刚度的贡献。

对于底层柱，当基底为嵌固支座时，根据柱上端点的弯矩平衡条件，有如下方程：

$$(6i_{b1} + 6i_{b2})\theta + 4i_c\theta + 4i_{c1}\theta = 6 \frac{\delta}{h} i_c \quad (10)$$

$$\theta = \frac{3\delta}{h} \cdot \frac{1}{3\alpha_{b,T} + 2 + 2\alpha_{c,T}}$$

根据柱本身的端部弯矩与剪力 V 的关系：

$$V = (12 \frac{i_c}{h} \delta - 6i_c \theta) / h \quad (11)$$

整理后得到基底嵌固时，楼层刚度中的该柱的侧向刚度值 D_B ：

$$D_B = \frac{V}{\delta} = \frac{6i_c}{h^2} \frac{6\alpha_{b,T} + 1 + 4\alpha_{c,T}}{3\alpha_{b,T} + 2 + 2\alpha_{c,T}} \quad (12)$$

上式也可以直接由前面(9)式得到。当基底为嵌固端时，可等效为 $\alpha_{b,B}$ 、 $\alpha_{c,B}$ 值趋于无穷大，相应 β_B 值也是无穷大，(9)式整理后即为(12)式，两式结果是一致的。

基底铰支柱的侧向刚度值计算可按类似方式推导，这里不再详述。对于顶层柱， $\alpha_{c,T} = 0$ ，仍适用公式(9)。部分柱、水平梁缺失的情况，相应的线刚度比值为 0，仍适用公式(9)。

三、支撑侧向刚度

根据图 1 的计算模型，计算楼层侧向刚度时，柱底的竖向变形为 0。在水平力作用下，柱和撑的弯曲变形很小可以忽略，只考虑支撑及相连柱的轴向变形。

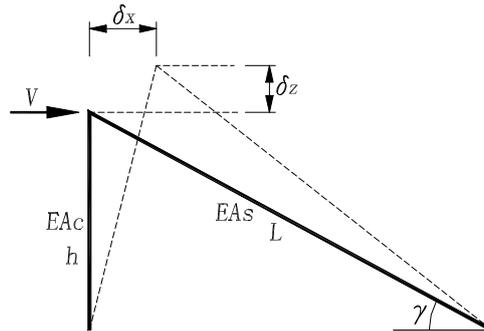


图 3、中心支撑在侧向作用下的变形

Fig.3. The deformation of brace under lateral force

如图 3 所示中心支撑，在水平力 V 作用下，柱、撑相交处的水平变形为 δ_x ，竖向变形为 δ_z 。则支撑轴向的变形为：

$$\delta_s = \delta_x \cos \gamma - \delta_z \sin \gamma$$

相应产生支撑轴力 N_s ，和柱的轴力 N_c ：

$$N_s = (\delta_x \cos \gamma - \delta_z \sin \gamma) EA_s / L \quad (13)$$

$$N_c = \delta_z EA_c / h$$

支撑轴力的竖向分量与柱轴力平衡，则可得到 δ_x 、 δ_z 的相互关系：

$$\delta_z = \frac{\sin \gamma \cos \gamma}{\sin^2 \gamma + \alpha_{cs}} \delta_x \quad \alpha_{cs} = \frac{EA_c L}{EA_s h} \quad (14)$$

将上式代入(13)式，并根据支撑轴力与外加水平力平衡，可得到中心支撑的侧向刚度：

$$D_s = \frac{V}{\delta_x} = \left(1 - \frac{\sin^2 \gamma}{\sin^2 \gamma + \alpha_{cs}}\right) \cos^2 \gamma \frac{EA_s}{L} \quad (15)$$

上式括号中的第二项为柱轴向变形的对支撑侧向刚度的削弱影响。柱的轴向刚度越大， α_{cs} 值也越大，柱对支撑侧向刚度削弱影响越小。

偏心支撑的一端位于梁上，不再满足图 3 所示支撑底部不产生竖向变形的条件。记与偏心支撑梁在支撑点处的竖向刚度为 K_b ，考虑梁变形的偏心支撑的侧向刚度可按下式计算：

$$D_s' = \frac{D_s D_{sb}}{D_s + D_{sb}} \quad D_{sb} = \cos^2 \gamma \cdot K_b \frac{L^2}{H^2} \quad (16)$$

其中 D_{sb} 为梁竖向变形在支撑顶端产生侧移的等效刚度。

四、其它相关计算

1、计算梁的等效线刚度

当与梁相连的柱、墙截面较大时，需要计算梁端刚臂；当梁本身截面较大时，需要考虑梁的剪切变形。可通过计算等效截面抗弯模量包含这些因素。

设梁长 L ，刚臂长度为 b_1 、 b_2 ，弹性段长 L_n 。考虑剪切变形时，梁弹性段由于支座变形产生的弯矩一般表达式为^[9]：

$$M(x) = \frac{EI}{L_n^2(1+\varphi)} [\Delta\theta(6x - (2-\varphi)L_n) + 6\theta_0(2x - L_n) + 6\Delta\delta(-2\frac{x}{L} + 1)] \quad (17)$$

当两端转角均为 θ 时，起点转角 $\theta_0 = \theta$ ，角度增量 $\Delta\theta = 0$ ，位移增量 $\Delta\delta = -\theta(b_1 + b_2)$ 。将各变形值代入上式，得到弹性段端弯矩，并经刚臂转化得到梁端弯矩。经与均质梁的在端转角为 θ 时的弯矩比较，可得到等效截面抗弯模量^[8]：

$$I = \left(\frac{L}{L_n}\right)^3 \frac{1}{(1+\varphi)} I_0 \quad \varphi = \frac{12\mu EI_0}{L_n^2 GA} \quad (18)$$

其中 I_0 为截面本身的抗弯模量， μ 为截面剪切均匀系数。由等效抗弯模量 I 即可计算构件的等效线刚度。

2、计算柱、墙截面主轴方向上的约束线刚度

当柱、墙主轴，与相连梁及其他相连柱、墙的主轴方向不一致时，需要进行角度转换。为表述方便，这里称转换后的线刚度为约束线刚度。

设梁与柱主轴之间夹角为 ϕ ，梁线刚度为 i_b 。忽略梁的扭转影响，柱主轴方向的约束线刚度可按下式计算：

$$i_b' = i_b \cos^2 \phi \quad (19)$$

设相连柱主轴坐标 $x'-y'$ 与本层柱主轴坐标 $x-y$ 夹角为 ϕ 。设相连柱在两方向的边界条件相

同，则沿 x' 、 y' 方向转角产生的弯矩与线刚度的比值系数相同，同时忽略两方向线刚度不等时产生的耦联项，转换到本层柱主轴方向上的等效线刚度可按下式计算：

$$i_{c,x} = i'_{c,x} \cos^2 \phi + i'_{c,y} \sin^2 \phi \quad (20)$$

$$i_{c,y} = i'_{c,x} \sin^2 \phi + i'_{c,y} \cos^2 \phi$$

3、统计楼层侧向刚度

用前面讲述的修正 D 值法和各类支撑的侧向刚度计算方法，根据结构水平、倾斜、竖直构件的几何关联关系，分别计算本层各竖向构件的侧向刚度。

柱、墙刚度中须包含剪切变形的影响。在侧向力作用下，柱、墙的弯曲变形与剪切变形，相当于串联弹簧，其综合刚度按下式计算：

$$D' = \frac{D_M GA}{D_M H + GA} \quad (21)$$

其中 D_M 为柱墙在考虑相连水平、竖向构件约束情况下的弯曲刚度，对于底层 D_M 用 D_B 替代。

对于夹层、错层结构，一个楼层中上下相连的柱、撑，按串联弹簧计算等效侧向刚度。

在将本层各竖向构件求和，最终得到计算楼层的侧向刚度。当竖向构件的主轴、或支撑的方向，与统计楼层侧向刚度的方向不一致时，还需要进行刚度转化。通过统计刚度转化过程中形成的耦联项，稍作处理，即可得到楼层侧向刚度的主轴方向，这里不再详述。

五、算例与分析

1、底层加高的框架结构的楼层侧向刚度

如图 4 所示框架结构，底层高 4.5m，上部楼层高 3.0m，跨度 6.0m。C30 混凝土，柱截面 0.4m×0.4m。梁截面宽度 0.4m 不变，高度变化，以计算不同梁柱线刚度比情况下楼层侧向刚度。

分别用本文方法计算，和按图 1 的模型进行有限元计算，结果见表 1。各楼层侧向刚度分别乘以层高，为归一化后的侧向刚度(与层侧移角对应)。

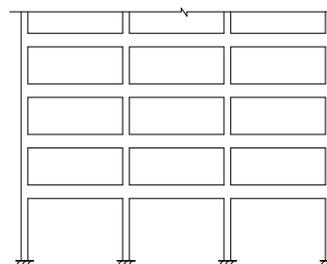


图 4、平面框架结构
fig.4 A example of plane frame

表 1、框架层侧向刚度(单位: $\times 10^4 \text{kN/m}^2$)

梁截面	计算方法	底层侧刚	上部楼层侧刚	上下刚度比
0.4×0.2	有限元	6.990	6.795	0.972
	本文方法	7.017	6.240	0.889
0.4×0.4	有限元	11.067	15.940	1.440
	本文方法	10.887	15.275	1.403
0.4×0.8	有限元	13.974	27.571	1.973
	本文方法	14.015	27.679	1.975

从表中各项数值可看出，本文提出的修正 D 值法计算得到的楼层侧向刚度值，与有限元精确计算的结果趋势相同，具体数值基本一致。表明本文计算方法是正确的，并且有很高的计算精度。

从表中各项数值可看出，层高、基底嵌固等因素对结构楼层侧向刚度的影响，与梁柱相对线刚度大小相关。当梁柱线刚度比较小时(剪力墙结构的条件)，层高等对侧向刚度影响较小。当梁柱线刚度比较大时(多层框架结构的情况)，层高等对侧向刚度影响显著，甚至超出了与层高非线性变化的程度。只有当梁柱线刚度值接近时，侧向刚度才与层高基本成线性变化。

2、框支剪力墙结构的楼层侧刚

这是一个实际工程，为高位转换框支剪力墙结构，如图 5 所示。分别用本文修正 D 值法，与按图 1 所示模型的有限元法，计算各楼层的侧向刚度。为便于比较，将侧向刚度归一化为与层侧移角对应的刚度值，结果见表 2。

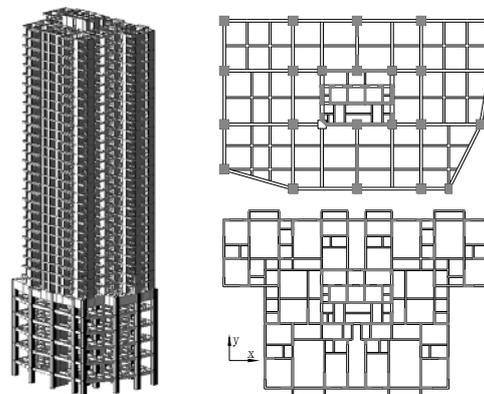


图 5、框支剪力墙结构实例
(该工程由广西建筑综合设计研究院提供资料)

表 2、框支剪力墙结构层侧向刚度(单位: $\times 10^7 \text{kN/m}^2$)

	层数	层高	X 方向		Y 方向	
			有限元	本文方法	有限元	本文方法
转换层以下	1	4.4	13.1027	13.6830	9.7055	9.8241
	2	5.0	9.8556	8.4080	7.0781	5.6671
	3	4.5	10.7898	9.0783	7.7936	6.1558
	4	4.5	10.7267	9.0751	7.7644	6.1558
	5	4.5	9.4846	9.0751	7.8492	6.1558
	6	5.0	9.8814	10.4550	8.6382	7.7377
转换层以上	7	2.8	8.7519	8.0635	14.3658	13.4110
	8	2.8	8.3537	7.4440	12.6410	11.308
	9	2.8	7.0810	6.1468	10.5449	9.0402
	10	2.8	7.0409	6.1118	10.4905	8.9986

根据转换上下楼层的侧向刚度比较，沿 X 向下部刚度大于上部刚度，沿 Y 向下部刚度小于上部刚度，本文方法与有限元法均反映了这种趋势。转换层以上楼层虽然增加了很多墙体，但主要是沿 Y 向的墙体，沿 X 向的多是折角小墙肢，因此这种结果反映了结构的实际特点。

从侧刚沿高度的分布来看，由于转换梁刚度很大(梁高 2.4m，宽 0.6~1.0m)，转换层上下楼层的侧刚明显大于相邻楼层。本文方法与有限元法均反映了这种特点。

从表中可看出，本文方法结果与有限元计算方法结果，反映的楼层刚度的分布规律、趋势相同，且数值基本一致，表明本文方法是能在实际工程中应用的实用方法。

六、结语

本文首先分析了楼层侧向刚度的意义，认为楼层侧向刚度是体现结构特性的宏观统计量，

是一种的相对值。楼层侧向刚度的计算应放置在整体结构中考虑，应包含相邻楼层的弹性约束、基底嵌固等边界条件。

本文针对楼层侧向刚度计算的特点，提出计算修正 D 法，用于梁、柱、墙构件的抗侧刚度的计算。该方法包含了水平梁、上下关联层的柱墙约束、边界条件等各主要影响因素。经算例表明，该方法正确地反映了各种情况下的楼层侧向刚度分布趋势，且具有较高的计算精度。

本文还提出了考虑关联柱、梁变形因素情况下中心支撑、偏心支撑侧向刚度的简化计算方法。对于水平、竖直的梁柱、墙的线刚度，采用相应的方法考虑了剪切变形的影响。

本文方法是一套完整的实用计算方法，较好地解决了楼层侧向刚度计算这一工程中急需解决现实问题。本文方法已经编入作者开发的结构设计软件 STRAT，并在工程设计中应用。

参考文献

- 1、建筑抗震设计规范(GB50011-2001)[S]
- 2、高层建筑混凝土结构技术规程(JGJ3-2002)[S]
- 3、高层民用建筑钢结构技术规程(JGJ99-98)[S]
- 4、包世华，新编高层建筑结构[M]，中国水利水电出版社，2001.8
- 5、方鄂华，高层建筑结构设计[M]，地震出版社，1990
- 6、李云贵、苑 麒，建筑结构的层刚度中心迭代计算，建筑科学[J]，1998(5)
- 7、忻鼎康、胡绍隆等，超高层混凝土结构的层间变形限值，建筑结构学报[J]，2000(3)
- 8、李国强，多高层建筑钢结构理论与设计[M]，中国建筑工业出版社，2003.8
- 9、谢靖中、李国强，一种新的集成非线性杆件单元刚度矩阵的方法[J]，工程力学，2002(12)